UNIVERSIDAD TECNOLOGICA

NACIONAL

FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Matemática

Ciclo Introductorio

Autora: L. Carbajal

C. E. I. T.

FU. CI. T. E. I.

¿COMENZAMOS CON HUMOR?

QUINO

Déjenme inventar

INDICE

UNIDAD I: CONJUNTOS NUMERICOS.
Números naturales(2). Ejercitación(9). ¿Cuáles son los números enteros? (12). Valor absoluto de un número entero (14). Operaciones en $\mathbb{Z}$ (15). Ejercitación (17). Números reales.¿Cuáles son los números racionales? (19). Operaciones en Q (21). Número real (23);Cuáles son los números irracionales? (24). Operaciones en $\mathbb{R}$ (25). Reducción a mínimo común índice (27). Extracción de factores de un radical (28). Introducción de factores bajo un signo radical (28). Operaciones con radicales (30). Combinación de operaciones en $\mathbb{R}$ (34). Ejercitación (37). Intervalos (38). Ejercitación (47). Trabajo Práctico de Unidad I (49). Respuestas de la ejercitación de Unidad I (53). Respuestas del trabajo práctico de Unidad I (59).

UNIDAD II: EXPRESIONES ALGEBRAICAS.
Expresiones algebraicas (63). Ejercitación(68). Polinomios(69). Operaciones entre polinomios (74). Valor Numérico de un polinomio (84). Teorema del resto (86). Ejercitación (89).Factoreo de un polinomio en una variable. Polinomio Primo o irreducible (92). Ejercitación (97). Expresiones algebraicas no enteras o fraccionarias (98). Operaciones entre expresiones algebraicas fraccionarias en una variable (100). Ejercitación (106). Trabajo práctico de Unidad II (107). Respuestas de la ejercitación de Unidad II (112). Respuestas del Trabajo Práctico de Unidad II(116)

UNIDAD III: FUNCION
¿Qué es una función? (119). Funciones escalares (123). Funciones polinómicas. Función lineal (124).Ceros de una función (125). Representación gráfica de una función (127).Función constante (134). Función biyectiva (138). Función inversa (140). ¿A qué llamamos composición de funciones? (143). Ejercitación (148). Otras funciones polinómicas. Función cuadrática (153). De grado $n > 2$. Ejercitación (159). Funciones algebraicas racionales no enteras o fraccionarias (161).Ejercitación (164). Otras funciones escalares. Función valor absoluto o función módulo (165). Función signo (166). Función parte entera (167). Funciones trascendentes. Función exponencial (169). Función logarítmica (171). Ejercitación (174). Otras funciones trascendentes. Funciones trigonométricas (177). Ejercitación (181). Periodicidad de las funciones trigonométricas (190). Funciones hiperbólicas (202). Ejercitación (204). Trabajo Práctico de Unidad III(207). Respuestas de la ejercitación de Unidad III (218). Respuestas del Trabajo Práctico de Unidad III (234).

UNIDAD IV: ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES.
Ecuaciones algebraicas enteras o polinómicas. Con una variable o incógnita (240). Ecuación general de segundo grado (244). Ecuaciones algebraicas enteras con dos variables o incógnitas (247). Ejercitación (251). Ecuaciones algebraicas no enteras o fraccionarias (256). Ejercitación (258). Ecuaciones no algebraicas. Ecuaciones exponenciales (259). Ecuaciones logarítmicas (260). Ecuaciones trigonométricas (261). Ejercitación (264). Sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas(265). Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas (275). Ejercitación (281). Sistemas de ecuaciones no lineales (285). Ejercitación (288). Inecuaciones de segundo grado en una variable (290). Ejercitación (293). Trabajo Práctico de Unidad IV (294). Respuestas de la ejercitación de Unidad IV (301). Respuestas del Trabajo Práctico de Unidad IV (309).

UNIDAD V: LIMITE. DERIVADA. INTEGRAL.
Límite finito para la variable tendiendo a un valor finito(313). Ejercitación (323). Derivada (324). Ejercitación (342). Integral. Cálculo de áreas (347). Integral indefinida (348). Integral definida (351). Ejercitación (369). Trabajo Práctico de Unidad V (375). A manera de integración ...(385). Respuestas de la ejercitación de Unidad V (386). Respuestas del Trabajo Práctico de Unidad V (393).

Trabajo Práctico Complementario N°1 (397). Trabajo Práctico Complementario N°2 (402). Trabajo Práctico Complementario N°3. (404). Respuestas de los Trabajos Prácticos Complementarios N°1 en pág. 411 ; N°2 en pág. 413 y N°3 en pág. 413).

PROLOGO

Con el propósito de apoyar el estudio de la Matemática en el primer tramo de la carrera dentro de la Universidad Tecnológica Nacional, se ha preparado este texto.

Por tal razón, este material de estudio desarrolla los contenidos correspondientes al Curso Introductorio, alternándolos con variadas y suficientes actividades de tal forma que el alumno pueda avanzar gradualmente en el dominio de cada tema.

De lo expuesto se desprende que este texto complementa el trabajo a realizar en el aula junto al profesor. Lo que ofrecen estas páginas es la posibilidad de que cada estudiante tenga reunida la totalidad de los temas que conforman el Curso así como también el tipo de ejercitación requerida para cumplir exitosamente esta primera etapa del aprendizaje.

A continuación, se presenta el conjunto de unidades que se desarrollan en el presente texto:

UNIDAD I : CONJUNTOS NUMERICOS .
UNIDAD II : EXPRESIONES ALGEBRAICAS .
UNIDAD III : FUNCIONES.
UNIDAD IV : ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES .
UNIDAD V : LIMITE. DERIVADA. INTEGRAL.

Leonor Carvajal

UNIDAD I

Conjuntos númericos

Sabemos que una de las conveniencias de utilizar el lenguaje simbólico en matemática, es la de evitar ambigüedades y reducir el discurso.

Por ejemplo, si a usted le pidieran que tradujese al lenguaje simbólico matemático el siguiente enunciado: "El opuesto de 3, más el recíproco de dos tercios multiplicado por el logaritmo en base tres de nueve, es cero"; seguramente quedaría extrañado o sorprendido frente a lo extravagante de tal enunciado.

Luego, lo releería con detenimiento y finalmente escribiría, por ejemplo:

$$-3 + \frac{3}{2} \cdot \log_3 9 = 0$$

En este caso hemos utilizado términos y conceptos tales como:

número opuesto

número recíproco y

logaritmo,

que,como muchos otros, es conveniente que recordemos para desenvolvernos con soltura y seguridad en el desarrollo de los distintos temas.

Números naturales

Ahora le planteamos la siguiente pregunta:

¿Ante qué situaciones necesitó recurrir a los números y cuáles fueron esos primeros números?

Escriba su respuesta a continuación:.....

.....

.....

¡Claro! Fue ante la necesidad de contar cosas, elementos, y esos números fueron: 1, 2, 3, ... etc.

Precisamente, el conjunto formado por dichos números recibe el nombre de:

conjunto de números naturales
y se lo simboliza con la letra:
$\mathbb{N}$

Por otra parte, recordemos que:

El conjunto formado por 0, 1, 2, 3, ... etc.
se denomina **conjunto de números naturales ampliado** y se lo simboliza con:
$\mathbb{N}_0$

¿Puede decirnos si estos conjuntos tienen último elemento?

.....

Obviamente, su respuesta es NO.

Esta situación se indica colocando tres puntos suspensivos detrás del último número escrito.

Luego: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

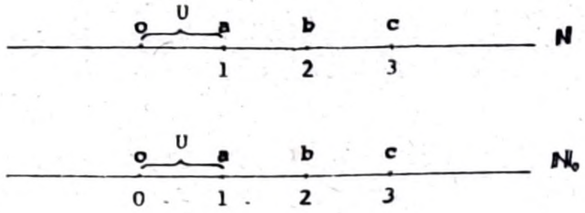
¿Son conjuntos ordenados? Es decir, dados dos números distintos, en cualquiera de estos conjuntos ¿es siempre uno menor que el otro?.....

.....

¿Su respuesta coincide con la siguiente?

Son conjuntos ordenados, por ejemplo: $2 < 7$, $4 < 10$, etc.

¿Cómo podemos representar gráficamente los números naturales?
Para ello utilizamos la recta numérica, tal como indicamos seguidamente:



Es decir, se considera sobre la recta un punto cualquiera **o**, y un segmento (arbitrario) unidad U.
Se transporta el segmento unidad U sobre la recta, consecutivamente, a partir de **o** y hacia la derecha tantas veces como se desee.
A cada punto de división se le hace corresponder ordenadamente un número natural. En el caso de representar a N_0, a **o** se le pone en correspondencia el número cero.
Entonces, decimos:

> Se denomina **gráficas** de los números a **o** y a los demás puntos obtenidos sobre la recta.

Por otra parte,

> Se llama **coordenada** de un punto al número correspondiente a dicho punto.

Vuelva a la recta numérica y establezca:
¿Cuál es la gráfica de 1? ¿y de 2?
.....
¿Su respuesta es **a** y **b**, respectivamente?
Si es así ¡muy bien! ¡Ha comprendido el concepto!

Nuestro próximo tema:

¿Cuáles son las operaciones que pueden efectuarse en N_0?

Dado que admitimos que usted conoce las operaciones en N_0, sólo haremos una breve reseña de sus notaciones simbólicas y de algunas de sus propiedades.

OPERACION	NOTACION SIMBOLICA	ELEMENTOS
Adición	a+b=c	a y b se denominan sumandos o términos. c es el resultado o suma.
Sustracción	a-b=c (con a≥b)	a se denomina minuendo. b es el sustraendo y c es la resta o diferencia.
Multiplicación	a.b=c	a y b se denominan factores. c es el producto.
División	a:b=c	(a es múltiplo de b y b≠0). a se denomina dividendo, b es el divisor y c es el cociente.
Potenciación	$a^n=b$	(a y n no son simultáneamente nulos). a se denomina base, n es el exponente, y b es la potencia.
Radicación	$\sqrt[n]{a}=b$ (si $b^n=a$)	a se denomina radicando, b es la raíz. n≥2 es el índice y $\sqrt{}$ es el radical.

Aprovechemos la oportunidad para recordar qué es un **múltiplo**.

> Un número **a** es **múltiplo** de un número **b** ∈ N_0, si y sólo si **a** puede escribirse como el producto de **b** por un elemento cualquiera de N_0

Simbólicamente:

$$a \text{ es múltiplo de } b \underset{*1}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}_0 / a = bk$$

Ejemplos:

40 es múltiplo de 5 pues $40 = 5.8$ y $8 \in \mathbb{N}_0$.

0 es múltiplo de 2 pues $0 = 2.0$ y $0 \in \mathbb{N}_0$.

Para tener en cuenta:

> Si a es múltiplo de b,
> entonces b es divisor de a.

La relación "divisor de" se simboliza así: |

Luego:

Si $a = b.k$ con $k \in \mathbb{N}_0 \underset{*2}{\Rightarrow} b|a$

También se dice que a es divisible por b.

Ahora retome los ejemplos anteriores y aplique la relación de divisor.....

.....

¿Su respuesta es como la que sigue?

5|40 y 2|0

Es decir, 40 es divisible por 5 y

0 es divisible por 2.

A continuación, escriba los tres primeros números naturales (excepto el uno) que tienen la propiedad de ser divisibles sólo por ellos mismos y por la unidad.

~~0~~ 2 3 ~~5~~

.....

.....

(*1): $\Leftrightarrow$ léase: si y sólo si

(*2): $\Rightarrow$ léase: entonces

¿Se acuerda cómo se denominan a los números que gozan de esta propiedad?

Escríbalo:

.....

Esperamos que su respuesta haya sido: los números primos.

Escriba tres pares de números naturales que tengan la propiedad de admitir al número uno como único divisor común:

..... , ... y .....

¿Recuerda cómo se denominan a los pares de números que gozan de esta propiedad? Escríbalo:.....

.....

Son los números coprimos o primos entre sí.

¡Sigamos! Le proponemos pasar a algunas de las propiedades de las operaciones ya vistas.

Operaciones / Propiedades	ADICION	SUSTRACCION	MULTIPLICACION
CLAUSURA	$a\in\mathbb{N}_o \wedge b\in\mathbb{N}_o \Rightarrow$ (*1) $\Rightarrow a+b=c \;/\; c\in\mathbb{N}_o$	———	$a\in\mathbb{N} \wedge b\in\mathbb{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow a.b=c \;/\; c\in\mathbb{N}$
CONMUTATIVA	$a+b = b+a$	———	$a.b = b.a$
ASOCIATIVA	$(a+b)+c = a+(b+c)$	———	$(a.b).c = a.(b.c)$
UNIFORME	$a=b \wedge c=d \Rightarrow a+c = b+d$	$a=b \wedge c=d \Rightarrow a-c = b-d$ ¡ojo!	$a=b \wedge c=d \Rightarrow a.c = b.d$
ELEMENTO NEUTRO	es el cero pues: $a+0 = 0+a = a$	———	es el uno pues: $a.1 = 1.a = a$
CANCELATIVA	$a+c = b+c \Rightarrow a=b$	$a-c = b-c \Rightarrow a=b$	$a.c = b.c \Rightarrow a=b$ (si $c\neq 0$)
DISTRIBUTIVA	———	———	$(a\pm b).c = a.c \pm b.c$ $c.(a\pm b) = c.a \pm c.b$
ANULACION DEL PRODUCTO	———	———	$a.b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$ (*2)

(*1): $\wedge$ léase: y
(*2): $\vee$ léase: o en sentido incluyente

Operaciones / Propiedades	DIVISION	POTENCIACION	RADICACION
UNIFORME	$a=b \text{ y } c=d \Rightarrow$ $\Rightarrow a:c = b:d$ ¡ojo!	$a=b \Leftrightarrow a^n=b^n$	$a=b \Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$
CANCELATIVA	$a:c=b:c \Rightarrow$ $\Rightarrow a=b$	———	———
DISTRIBUTIVA	$(a\pm b):c =$ $= a:c \pm b:c$ ¡ojo!	$(a.b)^n = a^n.b^n$ $(a:b)^n = a^n:b^n$	$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$
SIMPLIFICACION	———	———	$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página 53).

EJERCICIO N° 1

Subraye los números primos de la siguiente sucesión.

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14

EJERCICIO N° 2

Coloque una cruz en el casillero que corresponda a los pares de números coprimos o primos entre sí.

	4	9	10	15
4		X		X
9	X		X	
10		X		
15	X			

¿Cuáles son los números enteros?

Pensemos en la siguiente situación:

¿Qué sucede en $\mathbb{N}$ y en $\mathbb{N}_0$ cuando se desea calcular, por ejemplo:

4-7 ó 10-12 : etc.

En otras palabras, cuando el minuendo es menor que el sustraendo ?

Anote aquí su respuesta:.....

.....

.....

Coteje su idea con la que sigue:

Resulta evidente que tales cálculos no se pueden efectuar en tales conjuntos, y por lo tanto, nos vemos en la necesidad de ampliar el campo numérico.

Para ello, se crea un nuevo conjunto que es el de

los números enteros
cuyo símbolo es:
$\mathbb{Z}$

¿ Cómo se define a este conjunto ?

Se lo ha definido teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

1) Que $\mathbb{Z}$ tenga todos los elementos de $\mathbb{N}$.
2) Que al definir las operaciones en $\mathbb{Z}$ se conserven los resultados y las propiedades fundamentales de $\mathbb{N}$.
3) Que las sustracciones con minuendo menor que el sustraendo, siempre tengan solución.

¿ A qué se llama número opuesto ?

Para cada número natural n, definimos un nuevo número que llamamos opuesto de n, y se simboliza: -n.

Escriba el opuesto de 8:.....

Se lee: menos 8 y se simboliza: -8.

Convenimos en que el opuesto de cero es cero.

¿Recuerda cómo se denominan también a los números opuestos a los números naturales?.....

.....

Así es:

Los **enteros negativos** son los números opuestos a los números naturales. El conjunto de los mismos, o sea, el formado por: -1; -2; -3; ... se simboliza $\mathbb{Z}^-$

Luego,

$\mathbb{Z}^- = \{ -1; -2; -3; \ldots \}$

Destaquemos que:

Los **números naturales** se suelen llamar **enteros positivos** y el conjunto de los mismos se simboliza con $\mathbb{Z}^+$.

Entonces:

$\mathbb{Z}^+ = \{ 1; 2; 3; \ldots \}$

Ahora usted escriba el conjunto de números enteros:

$\mathbb{Z}$ = ...

.....

Tenemos:

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots \}$$

VALOR ABSOLUTO DE UN NUMERO ENTERO

Decimos que:

El valor absoluto de -4 es 4 y se simboliza $|-4| = 4$.
El valor absoluto de 9 es 9 y se simboliza $|9| = 9$.
El valor absoluto de 0 es 0 y se simboliza $|0| = 0$, etc.

Entonces observamos que:

El **valor absoluto** de un número es el mismo número si éste es entero no negativo; en cambio, es su opuesto si el número es un entero negativo.

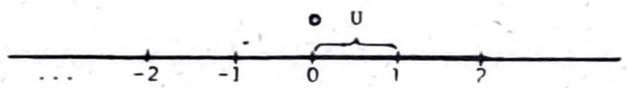
En general:

$$|x| = x \quad \text{si } x \geq 0$$
$$|x| = -x \quad \text{si } x < 0$$

Con respecto a la representación gráfica de los números enteros ¿se anima a hacerla?

.....

Veamos si su trabajo coincide con lo que sigue:



Digamos que esta figura se obtuvo transportando el segmento U sobre la recta, consecutivamente, y a partir de **0** hacia la derecha y hacia la izquierda.

OPERACIONES EN $\mathbb{Z}$ (ENTEROS)

En el conjunto $\mathbb{Z}$ se definen las mismas operaciones que en el conjunto $\mathbb{N}$ y se conservan las propiedades vistas.

¿ La propiedad uniforme también ? ¿ Por qué ?

.....

.....

Además se cumplen las siguientes reglas operatorias:

1) Para la **multiplicación y división** las reglas son análogas:

Factores y/o divisores	OPERACION: MULTIPLICACION	DIVISION
$a > 0,\ b > 0$	$a.b > 0$	$a:b > 0$
$a > 0,\ b < 0$	$a.b < 0$	$a:b < 0$
$a < 0,\ b > 0$	$a.b < 0$	$a:b < 0$
$a < 0,\ b < 0$	$a.b > 0$	$a:b > 0$

2) Para la **potenciación** (con exponente natural).

$a < 0 \wedge n$ impar $\Rightarrow a^n < 0$

En todos los demás casos es: $a^n \neq 0$.

3) Para la radicación.

IMPORTANTE

Definición: b es la raiz n-sima de a $\in \mathbb{Z}$.

Se simboliza: $b = \sqrt[n]{a}$

Se presentan los siguientes casos:

1) Si $a > 0$ y n es par, entonces existen dos raices n-simas en $\mathbb{Z}$.

   Son: $b_1 = \sqrt[n]{a}$ y $b_2 = -\sqrt[n]{a}$

2) Si $a < 0$ y n es par, entonces no existe $\sqrt[n]{a}$.

3) Si $a < 0$ y n es impar, entonces: $b = -\sqrt[n]{-a}$, tal que $b < 0$ y $b^n = a$

Escríba sobre la línea de puntos, los resultados de los siguientes ejemplos:

$\sqrt{36}$; $\sqrt[3]{64}$; $-\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[5]{-32}$; $\sqrt{-49}$

$\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{64}$

.....

.....

.....

Confronte sus respuestas con las que siguen:

6 ; 4 ; −3 ; −2 ; $\sqrt{-49}$ no está definido.

¡ Atención ! Algo importante:

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{si } x \geq 0$$
$$\sqrt{x^2} = -x \quad \text{si } x < 0$$

Ambos resultados pueden condensarse, diciendo que:

IMPORT.

La raíz cuadrada del cuadrado de un número, es el valor absoluto de dicho número.

¿ Cómo se simboliza ?

Así:

$$\sqrt{x^2} = |x|, \text{ siendo } |x|: \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en página 55).

EJERCICIO N° 8

Una con flechas cada enunciado de la primera columna con la aplicación correspondiente -si existe- de la segunda columna.

Enunciados en $\mathbb{Z}$	Aplicaciones
a) El opuesto de n es -n.	p) $\sqrt{4}.\sqrt{9} = \sqrt{4.9} = \sqrt{36}$
b) $\lvert r\rvert = n$ si $n \geq 0$ $\lvert n\rvert = -n$ si $n < 0$	q) $\lvert 2\rvert = 2$ y $\lvert -2\rvert = 2$
c) $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$ si $a \geq 0$ y $b \geq 0$	r) El opuesto de 8 es -8 y el opuesto de 0 es 0.
	s) $\sqrt{-2}.\sqrt{-18} = \sqrt{-2.(-18)}. = \sqrt{36}$

EJERCICIO N° 9

Complete las siguientes igualdades en los casilleros en blanco.

a) $2.3 = \boxed{6}$ e) $10:2 = \boxed{5}$

b) $-2.(-3) = \boxed{6}$ f) $-10:(-2) = \boxed{5}$

c) $-2.3 = \boxed{-6}$ g) $-10:2 = \boxed{-5}$

d) $2.(-3) = \boxed{-6}$ h) $10:(-2) = \boxed{-5}$

EJERCICIO N° 10

Complete las siguientes igualdades y luego exprese la regla correspondiente en la línea de puntos.

a) $2^3 = \boxed{8}$ .....

b) $(-2)^3 = \boxed{}$ .....

c) $2^4 = \boxed{}$ .....

d) $(-2)^4 = \boxed{}$ .....

e) $\sqrt[3]{27} = \boxed{2}$ .....

f) $\sqrt[4]{16} = \boxed{2}$ .....

g) $\sqrt[3]{-27} = \boxed{-3}$ .....

h) $\sqrt[4]{-16} = \boxed{}$ .....

Números reales: racionales e irracionales

¿Cuáles son los números racionales?

Como punto de partida ...¿Puede usted resolver divisiones como:

2:3 5:2 etc.

en el conjunto de los números enteros ?

¿ Por qué ? .....

.....

.....

¡Claro que no! Ya que ningún número entero multiplicado por 3 es igual a 2 para el primer ejemplo; y ningún número entero multiplicado por 2 es igual a 5 para el segundo caso.

Entonces observamos que:

> En el conjunto de los números enteros, las divisiones en las cuales el dividendo no es múltiplo del divisor, no pueden resolverse.

¿ Cómo solucionar este problema ?

Para ello se ha creado un nuevo conjunto que es el de

> los números racionales
> que simbolizaremos así:
> **Q**

Recordemos que:

> Q es el conjunto con menor número de elementos entre los que contienen a $\mathbb{Z}$, que permite definir la adición y la multiplicación de forma tal que se conservan los resultados y propiedades fundamentales de esas operaciones en $\mathbb{Z}$.
> Por otro lado, operaciones del tipo a:b, donde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$, tienen solución en $\mathbb{Q}$.

Sabemos que los números racionales se presentan como fracciones de la forma:

$\frac{a}{b}$ (se lee: a sobre b)

con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

Se dice que $\frac{a}{b}$ es el **cociente** entre a y b.

También es oportuno destacar que los números racionales pueden presentarse en forma de **expresiones decimales periódicas.**

Por ejemplo, resuelva:

$\frac{4}{9}$ = ... $\frac{151}{99}$ = ...

Los resultados son: 0,444... y 1,5252... ¿Verdad?

Si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son tales que a.d = b.c , entonces representan al mismo número racional y puede escribirse:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Resuelva:

Las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{10}$ ¿representan al mismo número racional?

.....

.....

Así es, pues 4.10 = 5.8

OPERACIONES EN $\mathbb{Q}$

Vamos a considerar en particular la adición, sustracción, multiplicación, y división.

A efectos de que la adición y multiplicación en $\mathbb{Q}$, conserven los resultados y propiedades de tales operaciones en $\mathbb{Z}$, es preciso definirlas de la siguiente manera:

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

2) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Ejemplo 1: $\frac{3}{4} + \frac{7}{5} = \frac{3.5 + 4.7}{4.5} = \frac{43}{20}$

Ejemplo 2: $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3.7}{4.5} = \frac{21}{20}$

La sustracción y la división se definen a partir de la adición y la multiplicación, respectivamente.

1) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + (-\frac{c}{d})$

2) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d})^{-1}$ siendo $c \neq 0$

Recuerde que $(\frac{c}{d})^{-1} = \frac{d}{c}$ es el recíproco de $\frac{c}{d}$, es decir, el producto de ambos es uno.

¡Nuevamente a resolver!

¿Cuál es el recíproco de $\frac{3}{4}$? ¿Y el de $-\frac{7}{5}$?

Además, justifique su respuesta:.....

$\frac{3-4}{4-3} = \frac{1}{1} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} = 1$

.....

.....

En efecto, son $(\frac{3}{4})^{-1} = \frac{4}{3}$ y $(-\frac{7}{5})^{-1} = -\frac{5}{7}$, respectivamente, pues:

$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$ y $-\frac{7}{5} \cdot (-\frac{5}{7}) = 1$

¿Cómo pueden representarse gráficamente los números racionales?

Tal como lo hemos visto para otros conjuntos numéricos, los racionales también se pueden representar mediante puntos de una recta.

Observemos la figura:

Le sugerimos que demuestre que entre dos números racionales, a y b (siendo a < b), por próximos que estén, por pequeña que sea su diferencia, siempre existen infinitos racionales.

·Sabía que por gozar de esta propiedad se dice que el conjunto Q es denso?

El próximo tema que nos convoca es...

Número real

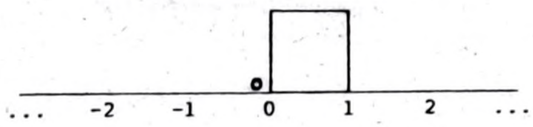
¿Le parece a usted que la recta está totalmente cubierta?

En otras palabras: ¿Le parece que todos los puntos de la recta son gráficas de algún número racional debido a que éstos se hallan tan juntos como se quiera?.....

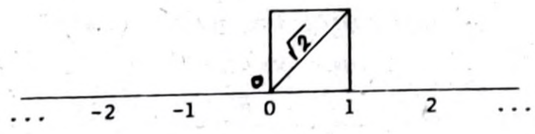
La respuesta seguramente coincide con la nuestra: ¡NO!

Analicemos por qué:

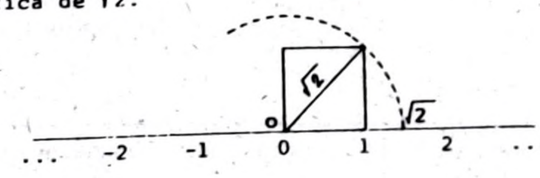
Construyamos, por ejemplo, un cuadrado tal como se indica en la figura:



Tiene por lado al segmento unidad, por lo tanto su diagonal mide $\sqrt{2}$ ¿Por qué?



Si trazamos un arco de circunferencia con centro en **O** y radio igual a la diagonal, éste cortará a la recta en un punto que es la gráfica de $\sqrt{2}$.



Conteste: ¿ $\sqrt{2}$ es racional?.....

La respuesta es NO.

Le sugerimos que demuestre que $\sqrt{2} \notin Q$

¿ CUALES SON LOS NUMEROS IRRACIONALES ?

Arribamos así al concepto de número irracional y expresamos que:

> Los números tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , e , etc. que en su expresión decimal (1,141...; 1,732...; 3,14...; 2,7...; etc.; respectivamente) tienen infinitas cifras no periódicas y que, por lo tanto, no pueden expresarse mediante una fracción, reciben el nombre de **números irracionales**.

Ahora bien:

> Los números racionales y los irracionales son los elementos de un nuevo conjunto: se trata del **conjunto de los números reales**, que simbolizamos: $\mathbb{R}$.

De esta manera, ¡ahora sí que la recta está completa!

Es decir:

> A cada punto de la recta le corresponde un único número real y, recíprocamente, a cada número real corresponde un único punto de la misma.

Y surge una pregunta:

¿ Es denso $\mathbb{R}$?

Operaciones en R

En el conjunto $\mathbb{R}$ se definen las mismas operaciones que en el conjunto $\mathbb{Q}$, con sus correspondientes propiedades.

Nos interesan, en particular, la potenciación y la radicación.

1) POTENCIACION CON EXPONENTE RACIONAL

a) Definición de potencia cuando $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}_0$:

$a^1 = a$	$a^n = \underbrace{a.a. \ldots a}_{n \text{ factores } a}$
$a^0 = 1$	Siendo $a \neq 0$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	Siendo $a \neq 0$

b) Definición de potencia con exponente fraccionario:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \text{con } -\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}' \text{ y excluyendo } a < 0 \text{ y } n \text{ par}$$

o bien:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si $a < 0$, entonces existe $a^{\frac{m}{n}}$ para n impar.

Observemos algunos ejemplos:

1) $16^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{16})^3$

$16^{\frac{3}{2}} = 4^3$

$16^{\frac{3}{2}} = 64$

2) $(-27)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{-27})^2$

$(-27)^{\frac{2}{3}} = (-3)^2 = 9$

3) $(-8)^{\frac{5}{2}}$ no está definido

c) Propiedades de la potenciación con exponente racional:

i- Producto de potencias de igual base:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

ii- Cociente de potencias de igual base:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

iii- Potencia de otra potencia:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$$

iv- Distributividad de la potenciación respecto a:

La multiplicación: $(a.b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{m}{n}}$

La división: $(a:b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$

2) RADICACION

a) Propiedades de la radicación:

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ ¡ojo!

2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

3) $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[kn]{a^m}$

4) $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$ con $k \in N$

si a es neg no va $\sqrt{(-8)^2} =$

∧ K es par

REDUCCION A MINIMO COMUN INDICE

¿ En qué consiste ?

> **Reducir varios radicales a mínimo común índice, es encontrar otros radicales que siendo respectivamente iguales a los dados, tengan por índice común al mínimo común múltiplo de sus índices.**

Ejemplo 1: reducir a mínimo común índice los siguientes radicales:

$$\sqrt[3]{5};\ \sqrt[5]{a^2};\ \sqrt{7}$$

$\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[6]{7^4} \cdot \sqrt[9]{7}$

Como el mínimo común múltiplo de 3; 5; y 2 es 30; debemos multiplicar al índice y al exponente del radicando de $\sqrt[3]{5}$ por 10; a los de $\sqrt[5]{a^2}$ por 6 y a los de $\sqrt{7}$ por 15.

Los radicales dados se transforman, respectivamente en:

$$\sqrt[30]{5^{10}};\ \sqrt[30]{a^{12}};\ \sqrt[30]{7^{15}}$$

Ejemplo 2: reducir a mínimo común índice los siguientes radicales.

$$\sqrt[15]{a^2} \; ; \; \sqrt[5]{b^4} \; ; \; \sqrt[25]{2^8} \; ; \; \sqrt[75]{c^6}$$

El mínimo común múltiplo de 15; 5; 25 y 75 es 75.

Luego los radicales dados se transforman, respectivamente en:

$$\sqrt[75]{a^{10}} \; ; \; \sqrt[75]{b^{60}} \; ; \; \sqrt[75]{2^{24}} \; ; \; \sqrt[75]{c^6}$$

EXTRACCION DE FACTORES DE UN RADICAL

La expresamos así:

$\sqrt[n]{a^n.b} = \sqrt[n]{a^n}.\sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$ excluyendo el caso: $a < 0$ y n par.

Veamos algunos ejemplos:

$$\sqrt[3]{a^3.b} = \sqrt[3]{a^3}\;\sqrt[3]{b} = a.\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[4]{432} = \sqrt[4]{2^4.3^3} = \sqrt[4]{2^4}.\sqrt[4]{3^3} = 2.\sqrt[4]{27}$$

$$\sqrt{2x^2} = \sqrt{2}.\sqrt{x^2} = \sqrt{2}.|x|$$

INTRODUCCION DE FACTORES BAJO EL SIGNO RADICAL

Le proponemos introducir al factor "a" en $\sqrt{b}$.

Sabemos que:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } a \geq 0$$
$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } a < 0 \quad n \text{ impar}$$

Reemplazando:

$$a.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n.b}$$

Ejemplo 1:

$$2.\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3.3} = \sqrt[3]{24}$$

Ejemplo 2:

$$a^3.b.\sqrt{2ab} = \sqrt{a^6}.\sqrt{b^2}.\sqrt{2ab} = \sqrt{2ab.a^6.b^2} = \sqrt{2a^7.b^3}$$

Definición de **radicales semejantes**:

> Se dice que dos o más radicales son semejantes, cuando extraídos de ellos todos los factores posibles, tienen el mismo índice y el mismo radicando, es decir que sólo pueden diferir en los factores que figuran fuera de ellos; estos factores se denominan **coeficientes**.

Observemos este ejemplo:

$\sqrt[3]{7}$, $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{7}$ son radicales semejantes

y éste otro:

$2.\sqrt{19b}$; $\sqrt{19b}$; $b.\sqrt{19b}$ son radicales semejantes

OPERACIONES CON RADICALES

1) Adición de radicales semejantes:

Podemos expresarla así:

$$a.\sqrt[n]{q} + b.\sqrt[n]{q} + c.\sqrt[n]{q} = (a+b+c).\sqrt[n]{q}$$

Fijémonos en este ejemplo:

$$12.\sqrt[4]{3} + 3.\sqrt[4]{3} = (12+3).\sqrt[4]{3} = 15.\sqrt[4]{3}$$

2) Sustracción de radicales semejantes:

Podemos simbolizarla de esta manera:

$$a.\sqrt[n]{q} - b.\sqrt[n]{q} = (a-b).\sqrt[n]{q}$$

Aquí un ejemplo:

$$18.\sqrt[3]{2} - 8.\sqrt[3]{2} = (18-8).\sqrt[3]{2} = 10.\sqrt[3]{2}$$

Nota: si los radicales no son semejantes, tanto en la adición como en la sustracción, la operación se deja indicada.

3) Multiplicación de radicales:

Expresamos que:

> El producto de varios radicales es el radical que tiene por coeficiente al producto de los coeficientes de los dados y cuyo radicando está formado por el producto de los radicandos de esos radicales reducidos a común índice, si es necesario.

Apliquemos este concepto en dos ejemplos:

$$-2\sqrt[3]{7}.3\sqrt[3]{7}.5\sqrt[3]{7} = -2.3.5\sqrt[3]{7^3} = -30\sqrt[3]{7^3} = -210$$

$$2\sqrt[5]{3}.\sqrt[4]{2} = 2.\sqrt[20]{3^4}.\sqrt[20]{2^5} = 2.\sqrt[20]{81.32} = 2.\sqrt[20]{2592}$$

4) División de radicales:

También aquí procederemos a enunciar en qué consiste esta operación.

> El coeficiente y el radicando del resultado son, respectivamente, los cocientes de los coeficientes y de los radicandos dados (ordenadamente) después de reducirlos a común índice.

Detengámonos en los casos que siguen:

$$\frac{1}{7}\sqrt[5]{3} : \frac{1}{14}\sqrt[5]{9} = \left(\frac{1}{7} : \frac{1}{14}\right)\sqrt[5]{3:9} = 2\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$$

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} : \frac{2}{5}\sqrt{2} = 3\sqrt[6]{\frac{1}{2^2}} : \frac{2}{5}\sqrt[6]{2^3} =$$

$$= \left(3 : \frac{2}{5}\right)\sqrt[6]{\frac{1}{4}} : 8 = \frac{15}{2}\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$$

5) Racionalización de denominadores:

> Dada una fracción en cuyo denominador figura un radical, se entiende por racionalizar dicho denominador, encontrar otra fracción igual a la dada y en cuyo denominador no figuren radicales.

Analicemos algunos de los casos que pueden presentarse:

a) Cuando el denominador es un radical único:

Ejemplo 1: $\frac{1}{\sqrt[7]{2}}$

Ejemplo 2: $\frac{2}{3.\sqrt[3]{4}}$

Ejemplo 3: $\frac{5}{\sqrt[5]{64}}$

¿ Qué hacer frente a este caso ?

Pues, se extraen del radical todos los factores posibles y se multiplica numerador y denominador de la fracción dada por el radical del mismo índice que el de su denominador, cuyo radicando tenga por exponente a la diferencia entre su índice y su exponente.

Apreciemos, entonces, qué sucede con los ejemplos dados:

Ejemplo 1: $\frac{1}{\sqrt[7]{2}} = \frac{\sqrt[7]{2^6}}{\sqrt[7]{2}.\sqrt[7]{2^6}} = \frac{\sqrt[7]{2^6}}{\sqrt[7]{2^7}} = \frac{1}{2}\sqrt[7]{64}$

Ejemplo 2: $\frac{2}{3.\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2.\sqrt[3]{2}}{3.\sqrt[3]{2^2}.\sqrt[3]{2}} = \frac{2.\sqrt[3]{2}}{3.\sqrt[3]{2^2}.2} =$

$= \frac{2.\sqrt[3]{2}}{3.\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2.\sqrt[3]{2}}{3.2} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$

Ejemplo 3: $\frac{5}{\sqrt[5]{2^6}} = \frac{5}{2.\sqrt[5]{2}} = \frac{5.\sqrt[5]{2^4}}{2.\sqrt[5]{2}.\sqrt[5]{2^4}} =$

$= \frac{5.\sqrt[5]{2^4}}{2.\sqrt[5]{2.2^4}} = \frac{5.\sqrt[5]{2^4}}{2.\sqrt[5]{2^5}} = \frac{5.\sqrt[5]{2^4}}{2.2} = \frac{5.\sqrt[5]{16}}{4}$

b) Cuando el denominador es una suma o diferencia de dos números con uno racional y el otro, irracional cuadrático, o ambos términos son irracionales cuadráticos:

Observemos:

Ejemplo 1: $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

Ejemplo 2: $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Ejemplo 3: $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Nota : Se llama conjugado de $a-\sqrt{b}$ a la expresión $a+\sqrt{b}$ (y recíprocamente); y conjugado de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ a la expresión $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (y recíprocamente).

De esta manera, podemos enunciar la siguiente regla:

> En este caso, para racionalizar el denominador debemos multiplicar al numerador y al denominador de la fracción dada, por el conjugado de su denominador y luego, hacer las operaciones indicadas.

Le proponemos retomar los ejemplos ya presentados, para que usted los resuelva según la regla vista.

Ejemplo 1:

Ejemplo 2:

Ejemplo 3:

Coteje su trabajo con las siguientes claves:

Ejemplo 1: $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})\ (2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$

Ejemplo 2: $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\ (\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} =$

$= -2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Ejemplo 3: $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})\ (\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} =$

$= \sqrt{5}-\sqrt{2}$

Combinación de operaciones en $\mathbb{R}$.

¿Qué sucede si al número dos se le suma el producto de cuatro por cinco, o sea, si al número dos se le suma veinte?

.....

.....

.....

¡Claro! Se obtiene veintidós.

Y lo simbolizamos así:

$2 + 4.5 = 2 + 20$

$2 + 4.5 = 22$

En cambio...

¿Qué ocurre si al número dos se le suma cuatro y al resultado se lo multiplica por cinco, o sea, si al número seis se lo multiplica por cinco?

.....

.....

.....

Es cierto, el resultado es treinta.

¿Se anima a simbolizar la operación descripta?

.....

.....

Así es:

$(2 + 4).5 = 6.5$

$(2 + 4).5 = 30$

Podemos apreciar que ambos enunciados incluyen las operaciones de adición y multiplicación.

En el primero se resolvió la multiplicación y luego, la adición; en cambio en el segundo se resolvió la adición y posteriormente, la multiplicación.

Observamos que los resultados obtenidos ¡son distintos!

¿Qué conclusión podemos extraer?

CONCLUSION

Cuando se anotan simbólicamente enunciados o se resuelven ejercicios en los que figuran distintas operaciones: adición, sustracción, multiplicación, etc., hay que establecer un orden de prioridad en las mismas, fijando algunas convenciones.

Detengámonos en algunas de esas convenciones:

1- Las operaciones adición y sustracción , indican términos y habrá que resolver las operaciones que figuran en ellos.

2- Si en una expresión con operaciones combinadas figuran paréntesis, deben realizarse primero las operaciones indicadas entre paréntesis.

¡ A practicar, entonces !

Resolver:

1) $\frac{2}{3} - 4{,}3 + \frac{1}{6} =$

2) $\frac{2}{3} - (4.3 + \frac{1}{6}) =$

Compare sus desarrollos con las resoluciones siguientes:

1) $\overbrace{\frac{2}{3}} - \overbrace{4.3} + \overbrace{\frac{1}{6}} = \frac{2}{3} - 12 + \frac{1}{6}$

$\frac{2}{3} - 4.3 + \frac{1}{6} = \frac{4 - 72 + 1}{6}$

$\frac{2}{3} - 4.3 + \frac{1}{6} = -\frac{67}{6}$

2) $\overbrace{\frac{2}{3}} - \overbrace{(\overbrace{4.3} + \overbrace{\frac{1}{6}})} = \frac{2}{3} - (12 + \frac{1}{6})$

$\frac{2}{3} - (4.3 + \frac{1}{6}) = \frac{2}{3} - \frac{73}{6}$

$\frac{2}{3} - (4.3 + \frac{1}{6}) = -\frac{69}{6}$

$\frac{2}{3} - (4.3 + \frac{1}{6}) = -\frac{23}{2}$

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en página 56).

EJERCICIO N° 11

1° PARTE

Cologue una cruz en el casillero correspondiente:

	$\mathcal{C}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
a)	-4				
b)	$\frac{2}{3}$				
c)	$\sqrt{5}$				
d)	$(1-\frac{1}{2})^{-1}$				
e)	$\frac{2}{\sqrt{2}}$				

2° PARTE

Represente gráficamente cada uno de los números del ejercicio anterior.

Representación Gráfica

a) -4 — $\mathbb{R}$

b) $\frac{2}{3}$ — $\mathbb{R}$

c) $\sqrt{5}$ — $\mathbb{R}$

d) $(1-\frac{1}{2})^{-1}$ — $\mathbb{R}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ — $\mathbb{R}$

Ejercicio N 12

Resuelva:

a) $\left| -2 + \frac{1}{4} : 3 \right| =$

b) $\frac{1}{6} \cdot 4 - (\frac{1}{2} - 3)^{-1} =$

c) $\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{8}{3}} - \frac{1 - \frac{1}{6}}{3} =$

d) $\frac{4 + 4.4}{4} - 1 =$

Intervalos

Consideremos, por ejemplo, un subconjunto de $\mathbb{R}$, el conjunto

$$A = \{ x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 7 \}$$

¿Cuáles son los puntos de la recta que corresponden a A?

Son: tres, siete, y todos los comprendidos entre ellos, lo cual se simboliza: [3;7] y se lee: intervalo cerrado tres, siete. Tres y siete son los extremos del intervalo y se escriben entre corchetes separados por un punto y coma.

Gráficamente:

Llegamos así a un enunciado general:

> Si a y b son números reales tales que a < b, se denomina intervalo cerrado de extremos a y b al conjunto $\{ x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b \}$

Ello se simboliza: [a;b]

Y se grafica:

¿ Qué sucedería si el conjunto propuesto fuera, por ejemplo:

$$B = \{ x \in \mathbb{R} / 3 < x < 7 \} ?$$

.....

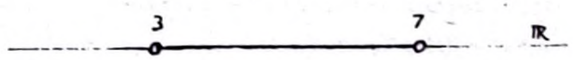
.....

.....

Diríamos que le corresponden todos los puntos de la recta comprendidos entre tres y siete.

Ello se simboliza: (3;7) y se lee: intervalo abierto de extremos tres y siete, los cuales se escriben entre paréntesis y separados por un punto y coma.

Se grafica:

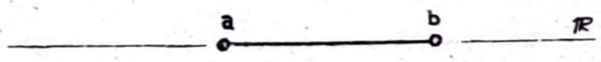


El enunciado general expresa :

> Si a y b son números reales tales que a < b, se denomina **intervalo abierto** de extremos a y b al conjunto $\{ x \in \mathbb{R} / a < x < b \}$.

Se simboliza: (a;b)

Y se grafica:



Nota: Observe que cuando los extremos del intervalo no pertenecen al mismo, en la representación gráfica del intervalo excluimos de la recta los puntos correspondientes a dichos extremos.

Sean los conjuntos:

$$C = \{ x \in \mathbb{R} / 3 \leq x < 7 \}$$
y
$$D = \{ x \in \mathbb{R} / 3 < x \leq 7 \}$$

Escriba sobre la línea punteada el extremo que no pertenece al conjunto C y el que no pertenece al conjunto D.

.....

.....

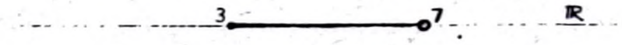
En efecto, $7 \notin C$ y $3 \notin D$.

Por tal razón, dichos conjuntos pueden simbolizarse, respectivamente:

$$[3;7) \quad y \quad (3;7]$$

El primero puede leerse: intervalo semicerrado a izquierda 3;7 ó semiabierto a derecha 3;7.

Se grafica:



El segundo se lee: intervalo semiabierto a izquierda 3;7 ó semicerrado a derecha 3;7

Observemos el gráfico:

Es decir, puede hablarse de **intervalos semiabiertos** o **intervalos semicerrados**, cuando uno solo de los extremos pertenece al mismo.

Se anotan:

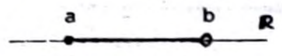
$$1 - [a;b) \quad \text{ó} \quad 2 - (a;b]$$

Se leen, respectivamente:

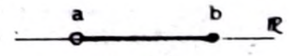
1_ Intervalo semicerrado a izquierda a;b
o intervalo semiabierto a derecha a;b.

2_ Intervalo semiabierto a izquierda a;b
o intervalo semicerrado a derecha a;b.

Se grafican:



[a;b)



(a;b]

EJERCICIOS

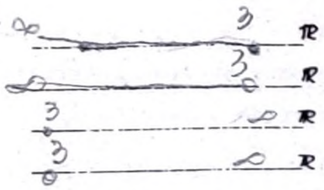
1- ¿Cómo representaría gráficamente los siguientes conjuntos? Hágalo.

A = { x ∈ ℝ / x ≤ 3 }

B = { x ∈ ℝ / x < 3 }

C = { x ∈ ℝ / x ≥ 3 }

D = { x ∈ ℝ / x > 3 }



2- ¿Cómo anotaría cada uno de los conjuntos dados en el punto 1, en forma de intervalo? Hágalo.

A = ... $(-\infty;3]$ .....

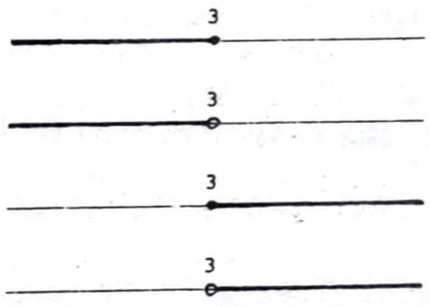
B = ... $(-\infty;3)$ .....

C = ... $[3;+\infty)$ .....

D = ... $(3;+\infty)$ .....

Si sus respuestas coinciden con las siguientes, ¡ha comprendido el concepto! De lo contrario, vuelva a estudiar este tema. ¡No se desanime!

Así:



1-

2-

A = $(-\infty;3]$

B = $(-\infty;3)$

C = $[3;+\infty)$

D = $(3;+\infty)$

Con el símbolo ∞, que se lee "infinito", se indica que los valores crecen constantemente en valor absoluto, pero no es un número real.

Continuemos con el concepto de intervalo.
Para ello retomemos el primer ejemplo dado:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 7 \}$$

y tratemos de expresarlo utilizando el concepto de valor absoluto de un número.

Sabemos que $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$, o sea $[-k;k]$.
También: $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$, o sea al intervalo $(-k;k)$.

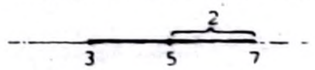
Ejemplos: $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$, o sea $[-2;2]$.
Análogamente: $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$, o sea $(-2;2)$.

¿Cómo podría escribir usted al conjunto propuesto A, utilizando el concepto de valor absoluto?

.....

.....

Como $A = \{ x \in \mathbb{R} / 3 \leq x \leq 7 \}$



La respuesta sería:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} / |x-5| \leq 2 \}$$

pues:

$|x-5| \leq 2$ equivale a: $-2 \leq x-5 \leq 2$

Sumando 5 a cada miembro:

$3 \leq x \leq 7$

Es decir:

$$A = [3;7]$$

Y ahora... ¿Qué le parece si hace un trabajo similar con los conjuntos que siguen?

$$B = \{ x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 4 \}$$
$$C = \{ x \in \mathbb{R} / 0 < x < 10 \}$$

Aprovechando este momento en el que trabajamos con desigualdades, le transcribimos un ejercicio en el que hemos cometido un error en el cálculo de x.
Le pedimos que: justifique cada paso, descubra el error y explique el por qué del mismo.

$$1-\frac{3}{2}x < 4$$

$$-\frac{3}{2}x < 4-1$$

$$x < (4-1) : (-\frac{3}{2})$$

$$x < 3 \cdot (-\frac{2}{3})$$

$$x < -2$$

Esto es falso pues tales valores no satisfacen la desigualdad dada.

Ejemplo, si consideramos x=-4 en nuestro ejercicio, resulta:

$$1-\frac{3}{2}(-4) < 4$$

$$1+6 < 4$$

$$7 < 4 \qquad \text{falso}$$

Relea el desarrollo dado. El error cometido es ¡grave! ¿Lo encontró? ¿Sí? ¡bien! ¿No?, siga analizando hasta encontrarlo!

Algo importantísimo para tener presente:

> **Si a ambos miembros de una desigualdad se los multiplica por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.**

Recordemos también que:

$$|x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k \ \vee \ x \geq k \qquad \text{con } k>0$$

o sea:

$$(-\infty;-k] \ \cup \ [k;+\infty)$$

Gráficamente:

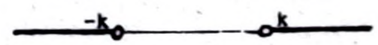
En forma análoga:

$$|x| > k \Leftrightarrow x < -k \ \vee \ x > k \qquad \text{con } k>0$$

o sea:

$$(-\infty;-k) \ \cup \ (k;+\infty)$$

Gráficamente:



Observemos un ejemplo:

$$|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \ v \ x \geq 3$$

Es decir:

$$(-\infty;-3] \quad U \quad [3;+\infty)$$

¿ Cuáles son los elementos del conjunto

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ |x+2| > 4 \} \ ?$$

Por definición:

$$|x+2| > 4 \text{ equivale a: } x+2 < -4 \ v \ x+2 > 4$$

Sumando miembro a miembro -2: $x < -6 \quad v \quad x > 2$

Luego:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x < -6 \ v \ x > 2 \}$$

o bien:

$$A = (-\infty; -6) \ U \ (2;+\infty)$$

Ahora realicemos la representación gráfica:

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en página 57).

EJERCICIO N° 13

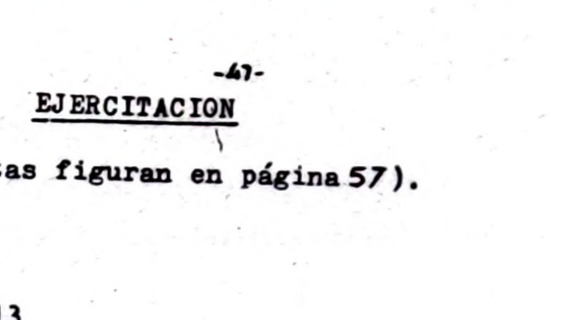
1° PARTE

a) Exprese en forma de intervalo cada uno de los siguientes conjuntos

	INTERVALO
A = { x ∈ R / -3 < x ≤ 9 }	(-3; 9]
B = { x ∈ R / -3 ≤ x < 8 }	[-3; 8)
C = { x ∈ R / x ≥ 8 }	[8; +∞)
D = { x ∈ R / x < -3 }	(-∞; -3)

2° PARTE

b) Grafique cada uno de los conjuntos anteriores:



3° PARTE

c) Exprese, sobre la línea de puntos, cómo leería cada uno de los intervalos que acaba de graficar.

A se lee: semiabierto a derecha.

B se lee: semicerrado a derecha.

C se lee: cerrado

D se lee: abierto

EJERCICIO N 14

Coloque una cruz en el casillero correspondiente.

ϵ	$(-4;3)$	$[-4;3)$	$[-4;3]$
-4		X	X
$\frac{3}{2}$	X	X	X
3			X

EJERCICIO N° 15

1° PARTE

Exprese en forma de intervalo el conjunto solución de:

a) $|x-3| < 8$

b) $|\frac{2x+1}{3}| \geq 1$

2° PARTE

Represente gráficamente cada uno de los conjuntos solución del ejercicio anterior.

a)

b)

TRABAJO PRACTICO UNIDAD I

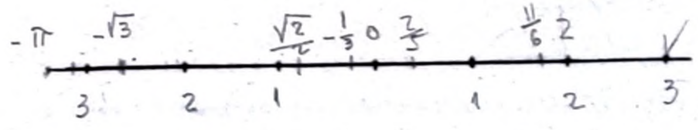
(Las respuestas figuran en página 59).

EJERCICIO N° 1

Ordene en forma creciente y luego grafique en la recta real los siguientes números:

$$2, -\frac{1}{3}, -\pi, 0, \frac{2}{5}, \frac{11}{6}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-\pi, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{5}, \frac{11}{6}, 2$ ✓



EJERCICIO N° 2

1° PARTE

Resuelva las siguientes operaciones:

a) $3^{-1}.3^{-3}.3^{-4} =$

b) $3^{-1} + 3^{-3} + 3^{-4} =$

c) $\sqrt[3]{-1+\frac{7}{8}} - \sqrt{-\frac{3}{4}+1} =$

d) $\sqrt{1-(-\frac{5}{3})^{-2}} - \sqrt[3]{-27} =$

e) $2.\sqrt{8} + 3.\sqrt{18} - 5.\sqrt{50} =$

f) $\sqrt[3]{-2}.\sqrt[3]{-4}.\sqrt[3]{8} =$

g) $\sqrt[4]{64} : \sqrt{2} =$

h) $\frac{2}{6-\sqrt{6}} =$

i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$

2° PARTE

Determine a qué conjuntos numéricos pertenece cada una de las respuestas que acaba de obtener.

a) ..... f) .....

b) ..... g) .....

c) ..... h) .....

d) ..... i) .....

e) .....

EJERCICIO N° 3

Exprese en lenguaje simbólico matemático cada uno de los siguientes enunciados, y en la segunda columna, marque una cruz si éstos resultan verdaderos.

ENUNCIADO	LENGUAJE SIMBOLICO	VERDADERO
a) El triplo de dos, menos el cuadrado de cuatro es el opuesto de diez.	$3.2-(4^2)=-10$	X
b) El triplo de la diferencia entre dos y el cuadrado de cuatro es el opuesto de diez.	$(2-4^2).3=-10$	

EJERCICIO N° 4

Recuadre el error cometido en cada uno de los siguientes desarrollos y justifique en cada caso su respuesta, escribiendo sobre las líneas punteadas.

a)

$$b = a$$
$$b.a = a^2$$
$$b.a - b^2 = a^2 - b^2$$
$$b.(a-b) = (a+b).(a-b)$$
$$b = a+b$$
$$b = b+b$$
$$b = 2b$$
$$1 = 2$$

NO VA CANCELATIVA CUANDO LOS FACTORES VALEN 0

.....

.....

.....

.....

b)

$$4 - 10 = 9 - 15$$
$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}$$
$$2^2 - 2.2.\frac{5}{2} + (\frac{5}{2})^2 = 3^2 - 2.3.\frac{5}{2} + (\frac{5}{2})^2$$
$$(2 - \frac{5}{2})^2 = (3 - \frac{5}{2})^2$$
$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$
$$2 = 3$$

.....

.....

.....

.....

EJERCICIO N° 5

Exprese, en la segunda columna, en forma de intervalo los conjuntos graficados en la primera.

	GRAFICAS	INTERVALO
a)	0 4 ℝ	[0,4]
b)	5 ℝ	(-∞,5]
c)	-1 ℝ	(-1,∞+)
d)	a b ℝ	(∞,a] [b,∞+)

EJERCICIO N° 6

Exprese en forma de intervalo el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones.

a) $\left|\frac{4x - 3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$

b) $|1-x| > 2$

EJERCICIO N° 7

Exprese cada uno de los siguientes intervalos utilizando el concepto de valor absoluto de un número.

A = [-3;1]

B = (1;6)

C = (-∞;-3] U [1;+∞)

RESPUESTAS DE LA EJERCITACION DE UNIDAD I

EJERCICO N° 1 (Pág.9)

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14

EJERCICIO N° 2 (Pág.9)

	4	9	10	15
4		X		X
9	X		X	
10		X		
15	X			

EJERCICIO N° 3 (Pág.10)

1° PARTE

Usted pudo haber dado alguna de estas respuestas.

1) a+b+c = a+c+b ó c+b+a ó b+a+c ó c+a+b ó b+c+a
2) a+b+c = a+(b+c) ó (a+b)+c
3) a+b+c = (b+c)+a ó (b+a)+c ó c+(b+a) ó a+(c+b)

2° PARTE

En el caso 1 = Aplicamos la propiedad comnutativa de la adición.

En el caso 2 = Aplicamos la propiedad asociativa de la adición.

En el caso 3 = Aplicamos las propiedades conmutativa y asociativa de la adición.

EJERCICIO N° 4 (Pág.10)

	2	3	4	10
2	2	6	4	10
3	6	3	12	30
4	4	12	4	20
10	10	30	20	10

EJERCICIO N° 5 (Pág.10)

1° PARTE

1) $(a+b).c = c.(a+b)$

2) $(a+b).c = a.c + b.c$

3) $(a+b).c = c.a + c.b$

2° PARTE

1) Propiedad conmutativa de la multiplicación.

2) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

3) Propiedad conmutativa y distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

EJERCICIO N° 6 (Pág.11)

a) ..3..

b) ..4..

c) ..2..

d) ..5..

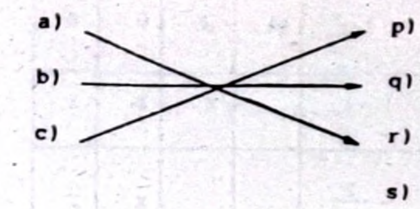
e) ..1..

EJERCICIO N° 7 (Pág.11)

a) $20:8 \notin \mathbb{N}_0$

b) No existe propiedad distributiva a izquierda de la división con respecto a la adición.

EJERCICIO N° 8 (Pág.17)



EJERCICIO N° 9 (Pág 18)

a)	6	e)	5
b)	6	f)	5
c)	-6	g)	-5
d)	-6	h)	-5

EJERCICIO N° 10 (Pág.18)

Sea $a^1 = b$ para los cuatro primeros casos presentados.

a) [8] $a>0 \wedge n$ impar $\Rightarrow b>0$

b) [-8] $a<0 \wedge n$ impar $\Rightarrow b<0$

c) [16] $a>0 \wedge n$ par $\Rightarrow b>0$

d) [16] $a<0 \wedge n$ par $\Rightarrow b>0$

Sea $\sqrt[n]{a} = b$ para los últimos cuatro casos presentados.

e) [3] $a>0 \wedge n$ impar $\Rightarrow b>0$

f) [2] $a>0 \wedge n$ par $\Rightarrow$ [$b_1 = \sqrt[n]{a}$] $\wedge$ $b_2 = -\sqrt[n]{a}$

g) [-3] $a<0 \wedge n$ impar $\Rightarrow b<0$

h) [ ] $a<0 \wedge n$ par NO ESTA DEFINIDO

EJERCICIO N° 11 (Pág.37)

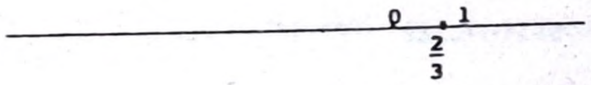
1° PARTE

	∈	N	Z	Q	R
a)	-4		X	X	X
b)	$\frac{2}{3}$			X	X
c)	$\sqrt{5}$				X
d)	$(1-\frac{1}{2})^{-1}$	X	X	X	X
e)	$\frac{2}{\sqrt{2}}$				X

2° PARTE

a) -4

b) $\frac{2}{3}$



c) $\sqrt{5}$

d) $(1-\frac{1}{2})^{-1}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

Ejercicio N 12(pág. 38)

a) $\frac{23}{12}$

b) $\frac{16}{15}$

c) $\frac{25}{18}$

d) 4

EJERCICIO N° 13 (Pág.47)

1° PARTE

A = (-3;9]

B = [-3;8)

C = [8;+∞)

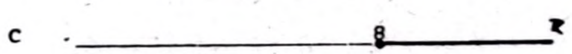
D = (-∞;-3)

2° PARTE

A

B

C



D

3° PARTE

A se lee: intervalo semiabierto a izquierda, de extremos -3 y 9 ; o se lee de esta otra forma: intervalo semicerrado a derecha, de extremos -3 y 9.

B se lee: intervalo semicerrado a izquierda, de extremos -3 y 8 ; o se lee de esta otra forma: intervalo semiabierto a derecha, de extremos -3 y 8.

C se lee: intervalo semicerrado a izquierda, en 8.

D se lee: intervalo semiabierto a derecha, en -3.

EJERCICIO N° 14 (Pág.48)

	(-4;3)	[-4;3)	[-4;3]
-4		X	X
$\frac{3}{2}$	X	X	X
3			X

EJERCICIO N° 15 (Pág. 48)

1° PARTE

a) (-5;11)

b) $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$

2° PARTE

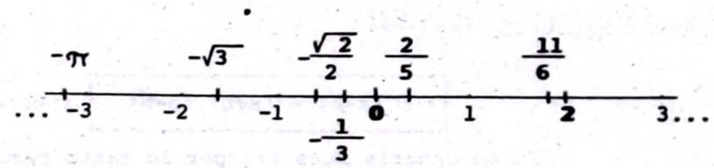
a)

b)

RESPUESTAS DEL TRABAJO PRACTICO DE LA UNIDAD I

EJERCICIO N° 1 (Pág 49)

$$-\pi;\ -\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{2}{5};\ \frac{11}{6};\ 2$$



EJERCICIO N° 2 (Pág 49)

1° PARTE

a) $\frac{1}{3^8}$

b) $\frac{31}{81}$

c) -1

d) $\frac{19}{5}$

e) $-12.\sqrt{2}$

f) 4

g) 2

h) $\frac{6+\sqrt{6}}{15}$

i) $-(5+2.\sqrt{6})$

2° PARTE

a) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

c) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

d) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R}$

f) $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

g) $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

h) $\mathbb{R}$

i) $\mathbb{R}$

EJERCICIO N° 3 (Pág.50)

ENUNCIADO	LENGUAJE SIMBOLICO	VERDADERO
	$3.2 - 4^2 = -10$	X
	$3.(2-4^2) = -10$	

EJERCICIO N° 4 (Pág.51)

a) $b.(a-b) = (a+b).(a-b)$ incorrecto

No se cancela pues b=a por lo tanto resulta

a-b=0

b) $\sqrt{(2-\frac{5}{2})^2} = \sqrt{(3-\frac{5}{2})^2}$ incorrecto

pues: $\sqrt{x^2} = |x|$

EJERCICIO N° 5 (Pág.52)

	GRAFICAS	INTERVALO
a)	0 4 ℝ	[0;4]
b)	5 ℝ	$(-\infty;5]$
c)	-1 ℝ	$(-1;+\infty)$
d)	a b ℝ	$(-\infty;a] \cup [b;+\infty)$

EJERCICIO N° 6 (Pág.52)

a) $[\frac{1}{2};1]$

b) $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$

EJERCICIO N° 7 (Pág 52)

$A = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| \leq 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / |2x-7| < 5\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} / |x+1| \geq 2\}$

UNIDAD II

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Usted ya conoce la utilidad del lenguaje simbólico matemático.

Por ejemplo, en Física: ¿Qué simbolizamos con la siguiente expresión?

(1) $v = g.t$ (constante unidas por multiplic. — variable)

Esta expresión simboliza la velocidad de caída en el vacío de un cuerpo abandonado a sí mismo, con velocidad inicial nula.
Donde:

"t": representa el tiempo transcurrido desde que se inició la caída; y

"g": es la aceleración debida a la atracción gravitatoria, en el lugar donde se produce la caída.

Analicemos otra:

(2) $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

¿Podría usted indicar qué simboliza?

.....

Ella simboliza el período de un péndulo ideal que oscila con amplitud pequeña.
Donde:

"l" : representa la longitud del hilo

Ahora frate de realizar el siguiente planteo:

¿Cómo simbolizaría el desplazamiento de un cuerpo, que es arrojado verticalmente hacia abajo, en el vacío?
Represente con Vo y con t a la velocidad inicial y al tiempo transcurrido, respectivamente.

.....

¿Su respuesta es como la siguiente?

(3) $Vo\ t + \frac{1}{2}\ gt^2$

Otro enunciado para simbolizar:

José está aburrido y se le ocurre dividir a un número **y** por la diferencia entre el cuadrado de otro número **x** y uno.

Simbolícelo aquí: .....

Coteje su respuesta con ésta:

(4) $\frac{y}{x^2 - 1}$ (con $x \neq 1$)

A continuación, ¿qué le parece si analizamos ciertas características de las expresiones anteriores?

Responda, entonces:

1) ¿Cuál es el numero constante y cuál es el número variable o indeterminado, en el ejemplo (1) ?

.....

.....

Respuesta: "g" es constante en el lugar considerado y "t" es variable.

2) ¿Mediante qué operaciones están ligados los números constantes y las variables, en los ejemplos dados?

.....

.....

.....

.....

¿Sus respuestas son así?

(1) : multiplicación.

(2) : multiplicación, división y radicación.

(3) : adición, multiplicación y potenciación.

(4) : división, sustracción y potenciación.

estas expresiones que unen números constantes y números variables, mediante un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación, se llaman **expresiones algebraicas.**

Agreguemos que:

Cuando las variables están afectadas únicamente por las operaciones: adición, sustracción, multiplicación o división (o como caso particular: potencias con exponentes enteros), las expresiones se denominan **algebraicas racionales.**

¿Puede usted indicar qué ejemplos pertenecen a ese grupo?

.....

Seguramente su respuesta es:

Ejemplos: (1), (3) y (4)

A su vez:

> Llamamos **expresiones algebraicas racionales enteras o polinomios** a aquellas en las cuales sus variables están vinculadas por las operaciones: adición, sustracción o multiplicación (o como caso particular: potencias con exponente entero no negativo, en numeradores).

Vuelva a los ejemplos e identifique cuáles son polinomios.

.....

Respuestas: (1) y (3)

Por otro lado:

> Denominamos **expresiones algebraicas racionales no enteras o fraccionarias** a aquellas en las cuales alguna de sus variables forma parte de un divisor, o figura en algún numerador con exponente entero negativo.

Indique qué ejemplo pertenece a este tipo:

.....

¡Claro! Se trata del (4).

Y por último:

> Se llaman **expresiones algebraicas irracionales** a las que incluyen alguna de sus variables bajo un signo radical o con exponente racional no entero.

Identifique el ejemplo de este grupo:

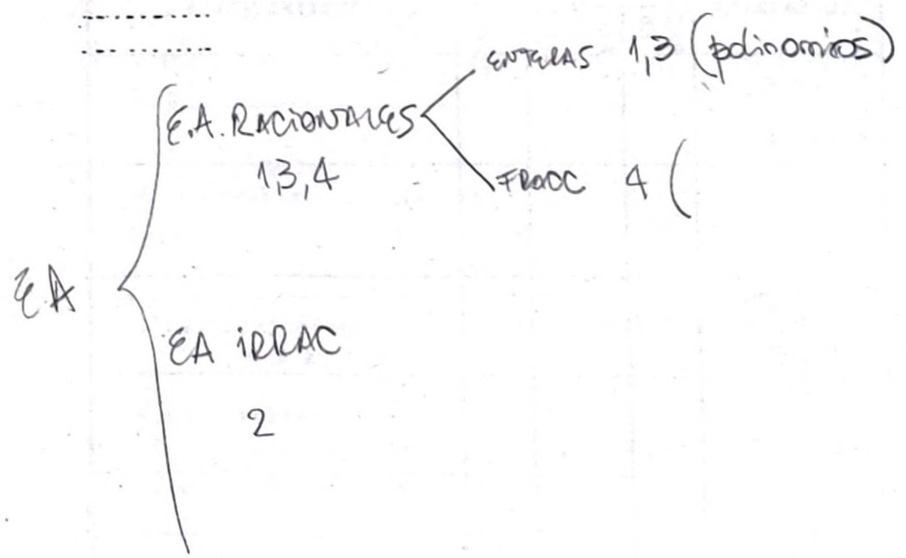
.....

Esperamos que su respuesta sea (2).

Bien, ahora para resumir lo visto hasta aquí, realice un esquema o cuadro sinóptico que incluya la clasificación de expresiones algebraicas.

.....

.....



Además de las expresiones algebraicas estudiadas, existen otras expresiones, tales como:

$$\log 2x \; ; \; \text{sen } x \; ; \; \frac{1}{2} + 2^x \; ; \text{ etc.}$$

Ellas no son expresiones algebraicas, y reciben el nombre de

expresiones trascendentes

Luego, más adelante, nos ocuparemos de ellas.

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en página 112).

EJERCICIO N° 1

Marque una cruz en el casillero correcto, luego justifique su respuesta en la última columna.

	EXPRESION ALGEBRAICA	RACIONAL ENTERA	RACIONAL NO ENTERA	IRRACIONAL	JUSTIFICACION
a)	$1+\frac{2x-3}{x+2}$ (con $x\neq -2$)		X		
b)	$x^2-3xy-y^3$	X			
c)	$4x^2+\frac{3}{4}x^{-3}$ (con $x\neq 0$)		X		
d)	$2y^2+8^{\frac{2}{3}}xy$	X			
e)	$2y^2+8x^{\frac{2}{3}}y$			X	

Polinomios

Ahora consideraremos las **expresiones algebraicas enteras o polinomios**, en particular los polinomios en **una sola variable o indeterminada** pues son los únicos que nos resultan útiles.

Tales como:

$P(x) = 2x^2 + 3x - 1$ o $P = 2x^2 + 3x - 1$

$Q(y) = y^3 + y$ o $Q = y^3 + y$

¿Puede escribir otros ejemplos?

.....

.....

.....

En general, un polinomio de grado n, en la variable x se simboliza:

variable — grado n — término independiente

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_n \neq 0$$

coeficientes

Veamos qué representa cada símbolo:

- Los coeficientes son números reales. O sea: $a_j \in \mathbb{R}$, con $j = 0, 1, 2, \ldots, n$
- La x representa un número real.
- Los exponentes son números enteros no negativos de cero a n.

Teniendo en cuenta lo que acabamos de expresar, indique con qué conjunto numérico trabajamos en los polinomios.

.....

Si usted indicó: el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$,
¡Muy bien!
Si hubo dudas, revise los temas respectivos de la unidad I.

Luego, para operar con polinomios, basta recordar y aplicar propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$.

Dado que usted ha trabajado con polinomios, aquí sólo haremos una reseña de algunos conceptos, operaciones y propiedades que nos resultarán útiles ¿De acuerdo?

Entonces, definimos:

> **Monomios o términos semejantes son los que tienen idéntica parte literal.**

Ejemplos:

$\frac{2}{3}x$; $-4x$; $\frac{1}{2}x$; etc.

Y... ¿Cuándo los polinomios son idénticos?

> **Dos polinomios son idénticos cuando tienen iguales los coeficientes de los términos semejantes.**

Vayamos a un ejemplo:

Calcule h sabiendo que:

$$P(x) = 2hx + 3 \quad y \quad Q(x) = 8x + 3$$

son idénticos.

.....
.....
.....

Observe el camino que nos lleva a la respuesta correcta:

Como $P(x) = Q(x) \Rightarrow 2h = 8$,

resulta: $\boxed{h = 4}$

¿A qué llamamos polinomios opuestos?

Compare los siguientes polinomios:

$$P(x) = 4x^2 - 3x + 8$$
$$R(x) = -4x^2 + 3x - 8$$

y enuncie qué particularidad observa:

.....
.....

Veamos si su respuesta es similar a la siguiente:

Los términos semejantes tienen distinto signo.

Por lo tanto,

> **Denominamos polinomios opuestos a aquellos que** tienen opuestos los coeficientes de los términos semejantes

Se simboliza:

$P(x) = -R(x)$ o bien $-P(x) = R(x)$

Proponga dos ejemplos de polinomios opuestos.

.....

.....

¡Continuemos!

Sea, por ejemplo, el polinomio:

$$P(x) = 4x^3 + 2x - 3$$

¿Cuántos factores literales hay en cada uno de los términos?
Escríbalo:

.....

.....

En efecto: en el primer término hay tres factores literales,
en el segundo, hay uno, y
en el tercero, no hay.

Por tal razón se dice que tales términos son de:
grado tres, uno y cero, respectivamente.

Y ¿cuál es el grado de un polinomio?

> **El grado de un polinomio** es el mayor de los grados de los términos que lo forman.

Luego, ¿cuál es el grado de P(x)?
Enúncielo:

.....

¡Claro! P(x) es de grado tres, o bien, P(x) es de tercer grado.

Consideremos otro polinomio:

$$Q(t) = 4t + 8t^3 - 1 + t^{10}$$

Escriba cuál es su grado:

uno, tres, diez

¿A qué se llama coeficiente principal de un polinomio?

> El coeficiente del término que determina el grado de un polinomio se denomina **coeficiente principal** del polinomio. En caso de ser uno, se dice que el polinomio es **reducido, normal, o mónico.**

Usted ya está en condiciones de responder a los siguientes ítems:

¿Cuál es el coeficiente principal de P(x)? ¿Y cuál el de Q(t)

4, 1

.....

¿Alguno de estos polinomios es reducido? Escriba cuál.

Q

Confronte sus respuestas con las que siguen:
El coeficiente de P(x) es 4; y el de Q(t) es 1 y éste último es un polinomio reducido.

¿Qué es un polinomio nulo?

> Se dice que un **polinomio es nulo** cuando tiene todos sus coeficientes iguales a cero.
> Se simboliza: **0** .

Convenimos en que:

el polinomio nulo **carece de grado.**

Operaciones entre polinomios

A partir de este momento, vamos a describir las operaciones entre polinomics:

1) Adición
2) Sustracción
3) Multiplicación
4) División

Comencemos con la primera de ellas.

1) ADICJON

> Dados dos polinomios P y Q. se llama suma de los mismos, al polinomio cuyos términos son los de los polinomios dados, después de efectuar la suma de los semejantes, si los hubiera.
> Se simboliza: P+Q .

Ejemplo:

Sumar $P = 3x^4 + 2x^3 - 1$ y $Q = 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7$

Para ello recurrimos a la disposición práctica que consiste en colocar en columna los términos semejantes de los polinomios sumandos.

Así:

$$\begin{array}{rl} P = & 3x^4 + 2x^3 \qquad\quad - 1 \\ + & \\ Q = & \qquad 5x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7 \\ \hline P+Q = & 3x^4 + 7x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6 \end{array}$$

2) SUSTRACCION

> Se llama diferencia entre P y Q, en ese orden, al polinomio que se obtiene sumando a P el opuesto de Q.
> Se simboliza: P-Q = P+(-Q).

Veamos un ejemplo:

Efectuar P-Q siendo $P = 2x^4 - 3x^2 + 1$ y $Q = x^4 - 6x^3 + x^2 - 2$

Luego:

$$\begin{array}{rl} P = & 2x^4 \qquad - 3x^2 + 1 \\ + & \\ -Q = & -x^4 + 6x^3 - x^2 + 2 \\ \hline P-Q = & x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 3 \end{array}$$

3) MULTIPLICACION

Dados dos polinomios P y Q, se llama producto de los mismos, al polinomio que se obtiene multiplicando cada término de uno de ellos por cada término del otro y sumando los términos semejantes, si los hubiera.
Se simboliza: P.Q o PQ

Vayamos a un caso:
Sean $P = x^2 + 2x - 1$ y $Q = 3x + 4$
Obtener P.Q

Para resolverlo, recurrimos a la siguiente disposición práctica.

$$P = x^2 + 2x - 1$$
$$Q = 3x + 4$$
$$3x \cdot P = 3x^3 + 6x^2 - 3x$$
$$4 \cdot P = 4x^2 + 8x - 4$$
$$3x.P+4.P = P.Q = 3x^3 + 10x^2 + 5x - 4$$

Nota: sea P un polinomio cualquiera.
Podemos definir:

$$P^2 = P.P$$
$$P^3 = P.P.P$$
.....etc.

Así, dado P = 2x-1, le proponemos que obtenga P^2 y P^3.

.....

.....

.....

Controle su trabajo con las respuestas que siguen:

$$P^2 = 4x^2 - 4x + 1$$
$$P^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

¿Respondió correctamente? ¡Muy bien!
¿Hubo algún error? Pues, entonces, revise la operación hasta ubicar el error y subsanarlo. ¡Adelante!

Por ser P un binomio además de recurrir a la disposición práctica propuesta para obtener P^2 y P^3, ¿de qué otra manera podría usted llegar a lo pedido?

Anótelo:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Nos gustaría que su respuesta fuese como la siguiente:

$$P^2 = (2x-1)^2$$

$$P^2 = (2x)^2 + 2.2x.(-1) + (-1)^2$$

pues $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$\boxed{P^2 = 4x^2 - 4x + 1}$$

y

$$P^3 = (2x-1)^3$$

$$P^3 = (2x)^3 + 3.(2x)^2.(-1) + 3.2x.(-1)^2 + (-1)^3$$

pues $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\boxed{P^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1}$$

Es decir, que usted haya desarrollado el cuadrado y el cubo de un binomio, respectivamente.

Nos queda por analizar otra operación.

4) DIVISION

> Si P y Q son dos polinomios y Q es no nulo, entonces existen y son únicos dos polinomios C y R tales que:
>
> a) $P = Q.C + R$
>
> b) grado de R < grado de Q, o bien
>
> R es el polinomio nulo.

Donde:

P es el dividendo

Q es el divisor

C es el cociente y

R es el resto.

¿Cómo dividir polinomios?

Para dividir polinomios debemos completar el dividendo y ordenar en potencias decrecientes de la variable, al dividendo y al divisor.

Y... ¿Qué significa completar un polinomio?

Para contestar a este interrogante, le proponemos -como ejemplos- los siguientes polinomios:

$$P = x^3-8$$

$$Q = x+2$$

Observe que

P es de grado tres, pero en este polinomio no figuran todos los términos de grado menor que tres. Se dice que P no está completo.

En general expresamos que:

> Si un polinomio es de grado n y no figuran en él todos los términos de grado menor que n, dicho polinomio no está completo.

¿Qué hacer para completar un polinomio?

Pues bien, si un polinomio no está completo y se desea completarlo, se agregan los términos que faltan, con coeficientes nulos.

De acuerdo con lo dicho, ¿cómo completaría usted a P? Escríbalo:

.....

La respuesta correcta es:

$$P = x^3 + 0x^2 + 0x - 8$$

Ahora responda: ¿Está completo Q? ¡No olvide justificar respuesta!

.....

.....

.....

Bien, ya estamos en condiciones de efectuar la división de dos polinomios.
Por ejemplo, obtener P:Q siendo P y Q los polinomios del caso anterior.

Para facilitar la operación, es conveniente proceder de la siguiente manera:

a) Como ya vimos, se ordenan según las potencias decrecientes de la variable, el dividendo y el divisor. Se completa el polinomio dividendo.

$$x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \quad \big| \quad x + 2$$

b) Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, obteniéndose el primer término del cociente:

$$x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \quad \big| \quad x + 2$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2$$

c) Se multiplica este término del cociente por el divisor y se resta este producto del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo:

$$\begin{array}{l} \cancel{x^3} + 0x^2 + 0x - 8 \quad \big| \quad x + 2 \\ + \quad \cancel{-x^3} - 2x^2 \qquad\qquad\quad x^2 \\ \hline - 2x^2 + 0x - 8 \end{array}$$

d) Se reitera el procedimiento indicado en b) y en c) tantas veces como sea necesario hasta que el dividendo se transforme en el polinomio nulo, o bien, su grado sea menor que el del divisor.
Esta última expresión es el resto de la división:

$$\begin{array}{l} \cancel{x^3} + 0x^2 + 0x - 8 \quad \big| \quad x + 2 \\ + \quad \cancel{-x^3} - 2x^2 \qquad\qquad\quad x^2 - 2x + 4 \\ \hline - \cancel{2x^2} + 0x - 8 \\ + \quad \cancel{2x^2} + 4x \\ \hline \cancel{4x} - 8 \\ + \quad - \cancel{4x} - 8 \\ \hline - 16 \end{array}$$

Luego: $C = x^2 - 2x + 4$ y $R = -16$

Notas:

1) El grado del cociente (si dicho grado existe), es la diferencia entre el grado del dividendo y el del divisor.

2) Si al dividir el polinomio P por el polinomio Q, el resto es el polinomio nulo, se dice que:
   - el cociente es exacto,
   - P es divisible por Q, o bien que: Q es divisor de P.
     Se simboliza: $P = Q.C$ C es el cociente exacto
     ó $Q|P$

¿Recuerda usted mediante qué otro procedimiento se pueden obtener los coeficientes del cociente y el resto de la división entre un polinomio P(x) y un binomio de la forma x+a, sin efectuar la operación habitual?

.....

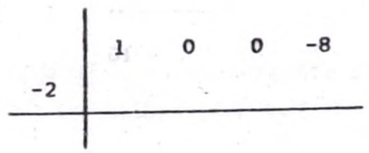
En efecto, a través de la regla de Ruffini.

Retomaremos el ejemplo anterior y aplicaremos esta regla, que consiste en lo siguiente:

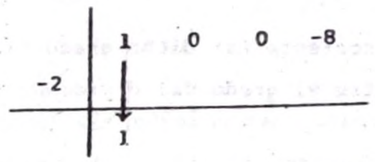
A) En una fila se escriben los coeficientes del dividendo completo y ordenado, según las potencias decrecientes de la variable:

1 0 0 -8

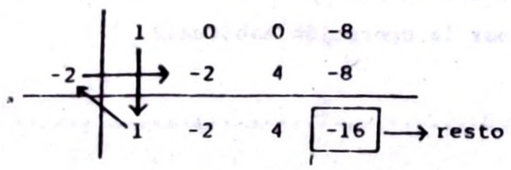
B) Se traza una cruz como indica la figura, y en el ángulo izquierdo se escribe el opuesto del término independiente del divisor:



C) En la tercer fila se obtienen los coeficientes del cociente, el primero de los cuales es el primero del dividendo:



D) Los restantes coeficientes del cociente se obtienen multiplicando al anterior obtenido, por el número que figura en el ángulo izquierdo y sumando este producto (que se coloca en la segunda fila), al correspondiente coeficiente de la primera fila.
El último número así obtenido es el resto.
Luego:



Usted puede observar que, como en estos casos el divisor es de grado uno, el grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.

¿Qué puede decir con respecto al grado del resto?

.....

.....

Por cierto, el grado del resto es cero por tratarse de una constante, o bien, dicho grado no existe por ser el resto el polinomio nulo.

Así, en nuestro ejemplo, como el dividendo es de grado tres, el del cociente es dos:

$C(x) = x^2 - 2x + 4$ y $R = -16$

Nuevamente, tome el lápiz y prepárese para resolver los ejercicios que a continuación le presentamos.

Obtener el cociente y el resto de la división entre P y Q, aplicando el mecanismo que considere más adecuado en cada ejercicio.

1) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 3$ $Q(x) = 2x^2 - x + 3$

2) $P(t) = 8t^4 + 3t^2 - t$ $\qquad Q(t) = t - \frac{1}{2}$

¿Sus respuestas son idénticas a las siguientes?

1) $C(x) = x^2 + 1$ y R es el polinomio nulo.

2) $C(t) = 8t^3 + 4t^2 + 5t + \frac{3}{2}$ y $R = \frac{3}{4}$

Sigamos con otro concepto dentro del tema: polinomios.

Valor numérico de un polinomio o especialización de un polinomio

Sea: $T(s) = -5s^3 + s^2 - 3$

Si consideramos $s = -1$ (por ejemplo), hacemos el reemplazo y operamos, resulta:

$$T(-1) = -5(-1)^3 + (-1)^2 - 3$$

$$T(-1) = 3$$

Se dice que 3 es el valor numérico del polinomio T(s) para $s = -1$.

¡Ahora su turno! Resuelva: ¿Cuál es el valor numérico do T(s) para $s = 2$? ¿Y para $s = 0$?

Hágalo aquí:

¿Sus resultados son como los que siguen?

$T(2) = -39$ y $T(0) = -3$

Llegamos así a una definición:

> El valor numérico de un polinomio P(x) para x=a, es el número que se obtiene al resolver las operaciones después de haber reemplazado en el polinomio a la variable x por a.
>
> Se simboliza: P(a)

Debemos agregar que:

> Si P(a) es igual a cero, se dice que a es una raiz o cero del polinomio P(x).

¿Cuáles de los números que siguen: -3; 0; $\frac{1}{2}$; y 1 son raíces de $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$?

Escríbalos y justifique la respuesta:

Coteje su trabajo con lo siguiente:

Son: -3 y $\frac{1}{2}$ pues:

$$P(-3) = 2(-3)^3 + 7(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0 \quad y$$

$$P(\tfrac{1}{2}) = 2(\tfrac{1}{2})^3 + 7(\tfrac{1}{2})^2 + 2(\tfrac{1}{2}) - 3 = 0$$

Antes de continuar... ¿prefiere hacer un descanso para recrearse un poco?
Si es así, ¡lo esperamos hasta que vuelva con nosotros!

Teorema del resto

Seguramente, usted ha aplicado muchas veces este teorema. ¿No es así? Ahora vamos a recordarlo.

Para ello le planteamos la siguiente pregunta:

¿Cuál es el resto de la división entre un polinomio, por ejemplo, $P(x) = 2x^3 - x + 5$ y otro de la forma $x + a$ por ejemplo, $Q(x) = x - 2$?
Escríbalo:

Evidentemente tal resto podría obtenerse aplicando la regla de Ruffini:

	2	0	-1	5
2		4	8	14
	2	4	7	**19** → resto

Si escribimos más detalladamente el procedimiento anterior, tenemos:

	2	0	-1	5
2		2^2	2^3	2.2^3-2
	2	2^2	2^3-1	2.2^3-2+5 → resto

Le preguntamos ahora: ¿Cuál es el valor numérico de P(x) para x igual al opuesto del término independiente de Q(x), o sea, para $x = 2$?
Escríbalo:

19

Así es: $P(2) = 2.2^3 - 2 + 5$

Compare el resto de la división entre P(x) y Q(x) con P(2).

¿A qué conclusión llega?

Anótela:

Podemos decir que si generalizamos esa conclusión, llegamos al enunciado del teorema del resto, que dice:

> El resto de la división entre un polinomio P(x) y otro de la forma x + a , es P(-a).

Otro ejercicio para usted:

a) ¿Es divisible $P = x^3 + 3x^2 - x - 3$ por $Q = x+1$?

Justifique su respuesta:

b) Por la respuesta de la parte a) ¿qué puede decirse que es -1 respecto del polinomio P?

Vemos: P es divisible por Q pues el resto de la división entre P y Q es cero, ya que: P(-1) = 0.

Luego, como P(-1) = 0 , resulta -1 raíz de P.

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en página 112).

EJERCICIO N° 2

1° PARTE

Calcular h y k, sabiendo que los siguientes polinomios son idénticos.

$$P(x) = 2hx^3+(k-1)x^2-1 \quad y \quad Q(x) = 8x^3+2x^2-1$$

$2hx^3 = 8x^3 \quad 2h = 8$

$hx^3 = \frac{8x^3}{x^3} \quad = \frac{8}{2}$

$k-1 = 2$

$k = 3$

2° PARTE

Calcular a, sabiendo que los siguientes polinomios son opuestos.

$$S(t) = t^2+4at+7 \quad y \quad R(t) = -t^2+2(a-1)t-7$$

$4 \cdot a$

$4aT = (2 \cdot (a-1)) \quad 2(a-1)$

$4 \cdot aT \qquad 2a-2$

$a(4 \cdot T) = 2 \cdot a - 2$

$4a \cdot T = 2 \cdot a - 2$

$2a =$

$=$

EJERCICIO N° 3

Complete el siguiente cuadro, consignando si, no, o el número que corresponda en las respectivas columnas.

	POLINOMIO	GRADO	COEFICIENTE PRINCIPAL	REDUCIDO O MONICO	COMPLETO	TERMINO INDEPENDIENTE
a)	$P = 3x^2 - 4x - 1$	2	3	NO	Si	-1
b)	$Q = -t^3 + 4$	-3	-1	NO	NO	4
c)	$S = r^2 . (1+3r^3)$					
d)	$T = -3 + m^8 + \frac{2}{3} m^2$					

$1r^2 + 3r^5$

EJERCICIO N° 4

En la primera columna, marque con una cruz todas las afirmaciones verdaderas, luego indique la respuesta correcta de las que resultaren falsas.

$P = x^2 - 4x + 4$ y $Q = 2x - 4$

DISTRIBUIR

	AFIRMACION	VERDADERA	RESPUESTA CORRECTA
a)	$P+Q = x^2 - 2x$	X	
b)	$P - 2Q = x^2 - 8x + 12$	X	
c)	$3P.Q = 6(x-2)^3$		
d)	$P:Q = x - 2$		x-4
e)	$Q^2 = 4(x-2)^2$		
f)	$P(-3) \neq -25$		
g)	La raíz de Q es 2		
h)	Las raíces de P son $x_1=2$ y $x_2=2$		

EJERCICIO N° 5

Marque con una cruz los enunciados verdaderos. En la segunda columna justifique cada respuesta verdadera simbolizando el enunciado, y cada respuesta falsa proporcionando un ejemplo. A modo de guía le presentamos la respuesta de dos items.

	ENUNCIADO	VERDADERO	JUSTIFICACION
a)	El polinomio nulo es neutro en la adición de polinomios.	X	Cualquiera sea P: $P+0 = 0+P = P$
b)	El polinomio nulo carece de grado.	X	
c)	El grado de la suma de dos polinomios P(t) y Q(t) es igual a la suma de los grados de los polinomios sumandos.		$P = x^2 + 3x - 1$ $Q = -x^2 + 6x + 3$ P+Q es de grado 1 y no de grado 4.
d)	El polinomio que es neutro en la multiplicación de polinomios, carece de grado.		X tiene grado cero
e)	El grado (si existe) del cociente entre un polinomio de grado h y otro de grado k es h-k.		
f)	El grado del resto de la división entre un polinomio de grado siete y otro de grado *uno*, es siempre menor que *uno*.		X
g)	El resto de la división entre P(x) y x-a es P(a).	X	

Ahora, otro tema referido a polinomios:

Factoreo de un polinomio en una variable.

Polinomio primo o irreducible

¿De qué se trata?

> Un polinomio P, de grado mayor que cero, es **primo o irreducible** si y sólo si toda descomposición del mismo de la forma $P = Q.C$ es tal que, algunos de los factores es de grado cero.

Con un ejemplo, podremos comprender mejor:

$3x + 7$ es primo ya que: $3x + 7 = 3\,(x+\frac{7}{3})$

o : $3x + 7 = 7\,(\frac{3}{7}x + 1)$

o : $3x + 7 = 9\,(\frac{1}{3}x + \frac{7}{9})$

etc.

Observe que en todos los casos, alguno de los factores es de grado cero.

¿Le parece a usted que $Q = x^2 - 10x^3$ es primo?

Justifique su respuesta.

En efecto Q no es primo pues $x^2 - 10x^3 = x^2.(1-10x)$, siendo:

grado de $x^2 > 0$ y grado de $1-10x > 0$.

¿Qué significa factorear un polinomio?

Para hablar de esto, vamos a utilizar el concepto de polinomio primo o irreducible que recién estudiamos.

Decimos que:

> **Factorear un polinomio** significa expresarlo como producto de una constante por polinomios primos o irreducibles.

Para ello, tenemos en cuenta las siguientes:

Propiedades

1) Todo polinomio P(x) de grado **n**, tiene **n** raíces.
2) Todo polinomio P(x) de grado **n**, tiene a lo sumo **n** raíces reales.

Consideremos por ejemplo:

$$P(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$$

cuyas tres raíces son: 1; -2 y $\frac{2}{3}$

pues $P(1) = 0$; $P(-2) = 0$ y $P(\frac{2}{3}) = 0$

Por ser 1 raíz de P(x), según hemos visto, éste resulta divisible por x-1.

	3	1	-8	4
1		3	4	-4
	3	4	-4	0

O sea:

$$P(x) = (x-1) \cdot C(x) \quad (*)$$

$$P(x) = (x-1) \cdot (3x^2 + 4x - 4)$$

Pero -2 también es raíz de P(x) y por lo tanto, lo es de C(x); luego, C(x) es divisible por x+2.

	3	4	-4
-2		-6	4
	3	-2	0

O sea:

$$C(x) = (x+2) \cdot \underbrace{(3x-2)}_{3(x-\frac{2}{3})}$$

o bien:

$$C(x) = 3(x+2) \cdot (x-\tfrac{2}{3}) \quad (**)$$

$\rightarrow$ otra raíz de P(x)

Reemplazando(**) en (*) se tiene:

$$P(x) = 3(x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-\tfrac{2}{3})$$

Observe que el polinomio dado ha quedado expresado como el producto de su coeficiente principal: 3, por factores mónicos de la forma $x-x_i$ (con $i = 1, 2, 3$), siendo x_i las raíces de P(x).

Es decir, P(x) está factoreado de tal manera que quedan en evidencia sus raíces.

En general, enunciamos que:

> Si un polinomio
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
> con $a_n \neq 0$ tiene sus n raíces racionales, puede expresarse factoreado en función de las mismas, de la siguiente manera:
> $$P(x) = a_n (x-x_1).(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

Pero... ¿Cómo obtuvimos las raíces de P(x)?

¿Por tanteo?

Convendrá con nosotros en que tal camino no es el más adecuado ¿Verdad?

Observe que:

> Los coeficientes de P(x) son números enteros y que en todos los casos, las raíces son de la forma $\frac{p}{q}$ (con p y q coprimos) y y tales que $p|4$ y $q|3$.

¿Qué es 4 del polinomio P(x)? termin independ

¿Qué coeficiente es 3 del polinomio P(x)? principal

A continuación, expresamos la siguiente propiedad:

> Si P(x), de grado n, con coeficientes enteros (y término independiento no nulo) admite una raíz racional $\frac{p}{q}$ (con p y q coprimos), entonces p es divisor del término independiente y q es divisor del coeficiente principal.

Agreguemos que éste es el enunciado del **teorema de Gauss**, cuya demostración podrá usted realizar en el curso de Algebra.

En nuestro ejemplo, como:

$p|4$ entonces $p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

$q|3$ entonces $q = \pm 1, \pm 3$

Luego: $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \ldots$

Ahora calculemos, por ejemplo P(1). Resulta:

$P(1) = 0$ Luego $\boxed{x_1 = 1 \text{ es raíz de } P(x)}$

y por lo tanto, según hemos visto:

P(x) es divisible por x-1

	3	1	-8	4
1	→	3	4	-4
	3	4	-4	0 resto

Así:

$$\frac{P(x)}{x-1} = 3x^2 + 4x - 4$$

O sea:

$$P(x) = \underbrace{(3x^2 + 4x - 4)}_{C(x)} . (x-1)$$

Por su parte, las raíces de C(x) se pueden calcular también aplicando el Teorema de Gauss, o bien, la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado, es decir:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Así obtenemos: $\boxed{x_2 = \frac{2}{3}}$ y $\boxed{x_3 = -2}$

Luego, C(x) es divisible por $x-\frac{2}{3}$ y por $x+2$.

	3	4	-4
$\frac{2}{3}$		2	4
	3	6	0 resto
-2		-6	
	3	0 resto	

Es decir:

$$\frac{C(x)}{(x-\frac{2}{3}).(x+2)} = 3$$

O bien:

$$C(x) = 3(x-\frac{2}{3}).(x+2) \quad **$$

Reemplazando ** en * :

$$\boxed{P(x) = 3(x-\frac{2}{3}).(x+2).(x-1)}$$

Con lo cual hemos factoreado a P(x) en función de sus raices

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página //5).

EJERCICIO N° 6

Factoree los siguientes polinomios en función de sus raíces.

a) $S = 2x^2 - 3x + 1$

b) $T = x^2 - 9$

c) $P = x\,(x - 1) - 2$

d) $Q = 4\,t^3 - 12\,t^2 - t + 3$

e) $R = s^3 + 7\,s^2 + 8\,s - 16$

Continuemos con otro tipo de expresiones algebraicas:

Expresiones algebraicas racionales no enteras o fraccionarias

Ejemplos:

$\frac{x^2}{9-x^2}$ con $|x| \neq 3$

$\frac{2x}{3x+2}$ con $x \neq -\frac{2}{3}$

Tal como hemos visto:

> Una expresión algebraica racional no entera o expresión algebraica fraccionaria es el cociente indicado entre dos polinomios, si el segundo no es el polinomio nulo y no es de grado cero.

¿Cómo lo escribiría en símbolos?

.....

.....

Así: $\frac{P}{Q}$ es una expresión algebraica fraccionaria si $Q \neq 0$ y no es de grado cero.

En particular trabajaremos con expresiones algebraicas fraccionarias en una variable.

¿En qué consiste la simplificación?

Considerando que $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \Leftrightarrow P.S = Q.R$, resulta:

$\frac{P.H}{Q.H} = \frac{P}{Q}$ pues $P.H.Q = Q.H.P$ es una identidad con $H \neq 0$

> Esta propiedad permite simplificar una expresión algebraica fraccionaria cuando después de haber factoreado numerador y denominador, figura en ambos un mismo factor (no nulo).

Vayamos a un ejemplo:

Sea $\frac{x^2 - 36}{3x^2 - 18x}$ con $x \neq 0$ y $x \neq 6$

Si factoreamos numerador y denominador, se tiene:

$$\frac{x^2 - 36}{3x^2 - 18x} = \frac{(x-6).(x+6)}{3x.(x-6)}$$

Luego, la expresión simplificada es:

$$\frac{x+6}{3x}$$

Qué expresión obtiene si simplifica $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$? |✱ 3

La expresión obtenida es: $\frac{x+3}{x-3}$

El último tema de este módulo está dedicado a:

OPERACIONES ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS EN UNA VARIABLE

Aquí vamos a considerar estas cuatro operaciones:

1) Adición
2) Sustracción
3) Multiplicación
4) División

Recordemos que se procede de la misma manera que se hizo con los números reales.

1) ADICION

Es conveniente ahora tener presente que:

> Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios, se los factorea, y se considera luego, el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

Sigamos, juntos, un ejemplo:

Hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de

$$x^2-9 \; ; \; x^2+6x+9 \; \text{ y } \; x+3$$

Luego:

$x^2-9 = (x+3).(x-3)$

$x^2+6x+9 = (x+3)^2$

$x+3 = x+3$

Así el m.c.m. pedido es: $(x-3).(x+3)^2$.

Resuelva:

¿Cuál es el m.c.m. de x^3+x^2 ; x ; x^3+3x^2+3x+1 ?

¿Su resultado es así? $x^2.(x+1)^3$

Ya estamos en condiciones de definir adición ¿verdad?

Digamos que si llamamos **M** al mínimo común múltiplo de **Q** y **S**, podemos definir:

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{\frac{M}{Q}\cdot P + \frac{M}{S}\cdot R}{M}$$

Resolvamos, por ejemplo: $\frac{3}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2-x}$; con $x \neq 0$ y $x \neq 1$

Como M es $x(x-1)$, resulta:

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2-x} = \frac{\frac{x(x-1)}{x-1} \cdot 3 + \frac{x(x-1)}{x^2-x} \cdot (4x-3)}{x(x-1)}$$

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2-x} = \frac{3x + 4x - 3}{x(x-1)}$$

$$\boxed{\frac{3}{x-1} + \frac{4x-3}{x^2-x} = \frac{7x - 3}{x(x-1)}}$$

2) SUSTRACCION

Definimos opuesta de la expresión algebraica fraccionaria

$$\frac{R}{S} \quad a \quad \frac{-R}{S}$$

Entonces,

> Para restar dos expresiones algebraicas fraccionarias, a la primera se le suma la opuesta de la segunda.
>
> Se simboliza:
>
> $$\frac{P}{Q} - \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} + \left(\frac{-R}{S}\right)$$

¿Cómo resuelve usted el siguiente ejercicio?

$$\frac{5x}{2x - 4x^2} - \frac{x - 3}{4x^2}, \text{ con } x \neq 0 \text{ y } x \neq \frac{1}{2}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Esperamos que su resultado sea: $\frac{12x^2 - 7x + 3}{4x^2.(1-2x)}$

3) MULTIPLICACION

> He aquí la definición: $\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{P.R}{Q.S}$

Resolvamos este ejercicio: $\frac{x^4-1}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x^2+1}$

con $x \neq 1$ y $x \neq -3$

Bien, factoreamos todos los numeradores, los denominadores y luego, simplificamos:

$$\frac{x^4-1}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x+3)^2} \cdot \frac{x.(x+3)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{x^4-1}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-1} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{x}{x+3}$$

4) DIVISION

Definimos la recíproca de $\frac{R}{S}$ es $\frac{S}{R}$ (con $R \neq 0$)

Luego,

$$\boxed{\frac{P}{Q} : \frac{R}{S} = \frac{P}{Q} \cdot \frac{S}{R}, \text{ con } R \neq 0}$$

Le proponemos que resuelva las siguientes divisiones:

a) $\frac{x-3}{4x} : \frac{x^2-9}{8x+16x^2}$, con $x\neq 0$, $x\neq 3$, $x\neq -\frac{1}{2}$

b) $\frac{x^2-x-2}{2x^2-4x} : \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+3x}$, con $x\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq 2$, $x\neq -3$

Compare sus respuestas con las siguientes:

a) $\frac{2(1+2x)}{x+3}$

b) $\frac{x+3}{2}$

Finalmente, para resolver ejercicios como por ejemplo:

$$\frac{2-x}{x^2} \cdot \frac{2x^3}{3x-6} + x =$$

en el cual las operaciones son adición y multiplicación, debemos comenzar por separar en términos:

$$\left[\frac{2-x}{x^2} \cdot \frac{2x^3}{3x-6}\right] + x = \frac{2-x}{x^2} \cdot \frac{2x^3}{3(x-2)} + x \qquad \text{(con } x\neq 0 \text{ y } x\neq 2\text{)}$$

$$\frac{2-x}{x^2} \cdot \frac{2x^3}{3x-6} + x = -\frac{(-2+x)}{} \cdot \frac{2x}{3(x-2)} + x$$

$$\frac{2-x}{x^2} \cdot \frac{2x^3}{3x-6} + x = -\frac{2x}{3} + x$$

$$\frac{2-x}{x^2} \cdot \frac{2x^3}{3x-6} + x = \frac{1}{3}x$$

¡Atención!

Nota: En los ejercicios que se propondrán para que usted resuelva, no indicaremos cuáles son los valores qué no pueden adoptar las variables; esta tarea queda a su cargo.

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página 115).

EJERCICIO N° 7

Resolver los siguientes ejercicios.

a) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} =$

b) $(-4 + \frac{1}{y^2}) : (2 + \frac{1}{y}) =$

c) $(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}) : \frac{1}{z^2-1} =$

TRABAJO PRACTICO UNIDAD II

(Las respuestas figuran en la página 116).

EJERCICIO N° 1

Marque con una cruz cada enunciado verdadero.

	ENUNCIADO	VERDADERO
a)	$-\frac{2}{x} + 3$ es una expresión algebraica.	Si
b)	4 log 3x es una expresión trascendente.	Si
c)	$2.(x-3)^2$ es un polinomio de segundo grado, completo.	Si
d)	Todas las raices de $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ son racionales.	NO. $+\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$
e)	Las raíces del cociente $\frac{P}{Q}$ siendo $P = t^3 - 2t^2 - t + 2$ y $Q = t-1$ son -1 y -2.	2 1 -1 -2
f)	$S(y) = y^4 + 2y^3$ tiene dos raíces simples o de multiplicidad uno.	FALSA

EJERCICIO N° 2

Complete los siguientes enunciados sobre la línea de puntos.

a) $3.(2x-x^2)^3 + 3x^6$ es un polinomio de grado ..... y coeficiente principal .....

b) El coeficiente principal de $(4x-1).(x-3) - 2x.(2x-7)$ es ..... y por lo tanto el polinomio se dice .....

c) $[P(x)+Q(x)] \cdot R(x) =$
$= P(X).$ ..... + ...R(x)

EJERCICIO N°3

Obtenga el cociente C y el resto R de la división entre P y Q, aplicando la regla de Ruffini.

a) $P = (x-2)^3 - 3.(x-2)$ $\quad Q = 3x-(1+2x)$

b) $P = 2x^3 + 3x - 1$ $\quad Q = x+\frac{3}{2}$

EJERCICIO N°4

Determine los valores naturales de h para que -1 sea raíz de $S(t) = 2h^2.t^2 + ht - 6$

EJERCICIO N° 5

Calcule k para que P(x) sea divisible por Q(x).

a) $P(x) = x^8 - kx^4 + 1$ y $Q(x) = x+1$

b) $P(x) = (-kx + 4)^2$ y $Q(x) = x-k$

EJERCICIO N° 6

Determine k, sabiendo que el resto de la división entre los siguientes polinomios es igual a 30.

$P(t) = 3t^3 - kt^2 + 2$ y $Q(t) = t + 2$

EJERCICIO N° 7

1° PARTE

Determine si P es divisible por Q, siendo:

a) $P = 2z^2 - z - 1$ y $Q = z-1$

b) $P(y) = y^4 - a^2y^2 + y + a$ y $Q(y) = y+a$

c) $P = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ y $Q = x+2$

2° PARTE

Factoree en función de sus raíces los polinomios de a) y c).

EJERCICIO N°8

Cree dos polinomios de grado mínimo tales que cumplan las siguientes condiciones.

a) -raíz simple: 3
   -raíz doble: 0

b) -raíces simples: 2 y -4
   -raíz doble: 1
   -coeficiente principal: 3

EJERCICIO N° 9

Marque una cruz en la primera columna si el enunciado resulta vordadero, y en ese caso exprese la definición correspondiente en la segunda columna.

Dada esta definición: a es raíz de $\frac{P(x)}{Q(x)} \Leftrightarrow P(a) = 0 \wedge Q(a) \neq 0$

	ENUNCIADO	VERDADERO	JUSTIFICACION
a)	Las raíces de $\frac{x^2-25}{x+4}$ son 5 y -5.	X	
b)	Las raíces do $\frac{x^2-4}{x+1} - 1$ son números racionales.		NO SON RAC.

EJERCICIO N° 10

Resuelva las siguientes operaciones:

a) $\left(2 - \frac{2}{y-1}\right) : \frac{y^2 - 4y + 4}{y^2 - y} =$

b) $\left(\frac{3+m}{3-m} - \frac{3-m}{3+m}\right) : \left(\frac{6}{m-3} + \frac{6}{m+3}\right) =$

RESPUESTAS DE LA EJERCITACION DE UNIDAD II

EJERCICIO N° 1 (Pág. 68)

	EXPRESION ALGEBRAICA	RACIONAL ENTERA	RACIONAL NO ENTERA	IRRACIONAL	JUSTIFICACION
a)			X		La variable forma parte de un divisor
b)		X			Las variables sólo están afectadas por las operaciones adición, sustracción, multiplicación y potenciación con exponente natural.
c)			X		Idem caso a)
d)		X			Análogo al caso b)
e)				X	Por lo menos una variable tiene exponente racional no entero.

EJERCICIO N° 2 (Pág. 69)

1° PARTE

$$2h = 8 \rightarrow h=4$$

$$k-1 = 2 \rightarrow k=3$$

2° PARTE

$$-4a = 2(a-1)$$

$$-2a = a-1$$

$$-3a = -1$$

$$a = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO N° 3 (Pág. 90)

	POLINOMIO	GRADO	COEFICIENTE PRINCIPAL	REDUCIDO O-MONICO	COMPLETO	TERMINO INDEPENDIENTE
a)		2	3	NO	SI	-1
b)		3	-1	NO	NO	4
c)		5	3	NO	NO	0
d)		8	1	SI	NO	-3

EJERCICIO N° 4 (Pág. 90)

	AFIRMACION	VERDADERA	RESPUESTA CORRECTA
a)		X	
b)		X	
c)		X	
d)			$\frac{1}{2}x - 1$
e)		X	
f)		X	
g)		X	
h)		X	

EJERCICIO N° 5 (Pág. 91)

	ENUNCIADO	VERDADERO	JUSTIFICACION
a)		X	Cualquiera sea P: P+0 = 0+P = 0
b)		X	Por definición
c)			Ejemplo: $P(x)=x^2+3x$ y $Q(x)=-x^2+6x$. P+Q es de grado uno y no cuatro.
d)			pues es P=1 (de grado cero)
e)		X	Por definición de división
f)			Ejemplo: $(x^7-1):(x-1)$ tiene por resto a 0 y éste carece de grado
g)		X	Por teorema del resto

Ejercicio N 6 (pág. 97)

a) $S = 2\,(x-1)(x-\frac{1}{2})$

b) $T = (x+3)(x-3)$

c) $P = (x-2)(x+1)$

d) $Q = 4\,(t-\frac{1}{2})(t+\frac{1}{2})\,(t-3)$

e) $R = (s-1)(s+4)^2$

EJERCICIO N° 7 (Pág. 106)

a) $\frac{2x^2+3x-1}{x^3}$

b) $\frac{1-2y}{y}$

c) 2z

RESPUESTAS DEL TRABAJO PRACTICO DE UNIDAD II

EJERCICIO N° 1 (pág 107)

	ENUNCIADO	VERDADERO
a)	$\frac{2}{3}+3$ es una expresión algebraica.	X
b)	4 log 3x es una expresión trascendente.	X
c)	$2.(x-3)^2$ es un polinomio de segundo grado, completo.	X
d)	Todas las raíces de $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ son racionales.	
e)	Las raíces del cociente $\frac{P}{Q}$ siendo $P = t^3 - 2t^2 - t + 2$ y $Q = t-1$ son -1 y -2.	
f)	$S(y) = y^4 + 2y^3$ tiene dos raíces simples o de multiplicidad uno.	

EJERCICIO N° 2 (pág 108)

a) $3.(2x-x^2)^3 + 3x^6$ es un polinomio de grado **cinco** y coeficiente principal **18**

b) El coeficiente principal de $(4x-1)(x-3) - 2x(2x-7)$ es **uno** y por lo tanto el polinomio se dice **reducido, normal o mónico**.

c) $[P(x)+Q(x)].R(x) = P(x).\ \mathbf{R(x)} + \mathbf{Q(x)}.R(x)$

EJERCICIO N° 3 (pág 108)

a) $C = x^2 - 5x + 4$ $\qquad R = 2$

b) $C = 2x^2 - 3x + \frac{15}{2}$ $\qquad R = -\frac{49}{4}$

EJERCICIO N° 4 (pág 108)

$h = 2$

EJERCICIO N° 5 (pág 109)

a) $k = 2$

b) $|k| = 2$

EJERCICIO N° 6 (pág 109)

$k = -13$

EJERCICIO N° 7 (pág 109)

1° PARTE

a) Si, P es divisible por Q.

b) Si, P es divisible por Q.

c) Si, P es divisible por Q.

2° PARTE

$P = 2(z-1).(z+\frac{1}{2})$

$P = 3(x+2).(x-1).(x-\frac{1}{3})$

EJERCICIO N° 8 (pág 110)

a) $P = kx^2.(x-3)$ $\qquad$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

b) $Q = 3.(x-2).(x+4).(x-1)^2$

EJERCICIO N° 9 (pág 110)

	ENUNCIADO	VERDADERO	JUSTIFICACION
a)	Las raíces de $\frac{x^2-25}{x+4}$ son 5 y -5.	X	$5^2-25 = 0$ y $5+4 \neq 0$. $(-5)^2-25 = 0$ y $-5+4 \neq 0$.
b)	Las raíces de $\frac{x^2-4}{x+1}-1$ son números racionales.		

EJERCICIO N° 10 (pág 111)

a) $\frac{2y}{y-2}$

b) -1

UNIDAD III : FUNCION

¿Qué es una función?

Para comenzar le presentamos la siguiente situación:

¿ Qué datos necesita conocer para calcular el área de un círculo ?

.....

.....

Seguramente su respuesta es igual a la que sigue:

Es necesario conocer su radio, pues el área de un círculo **depende** del radio del mismo, ya que

$$a = \pi r^2$$

y, por lo tanto, para **cada valor de r**, resulta un único valor de **a**.

Ejemplos:

Si r=3 entonces $a = \pi . 3^2$; $a = 9\pi$

Si r=2 entonces $a = \pi . 2^2$; $a = 4\pi$ etc.

Dado que a r le asignamos valores arbitrarios, la denominamos variable independiente.

En cambio,

Los valores de a dependen de los de r, por eso a a la llamamos variable dependiente.

Decimos, por tal razón, que

a está en función de r .

Y... ¿cómo se simboliza esta relación entre las variables?

$a = f(r)$ o $a = g(r)$... etc.

¿Cómo las leemos?

a es igual a f de r o
a es igual a g de r, etc.

Ahora, trate de resolver:
¿Cómo simbolizaría usted la fórmula que pone de manifiesto la dependencia de la aceleración que adquiere un punto material con respecto a la fuerza aplicada y a la masa de dicho punto?

.....
.....

Sería: $a = \frac{f}{m}$

En este caso:

a depende de la fuerza f y de la masa m

pues

a cada valor de f y m corresponde un único valor de a.

Decimos que

a está en función de f y de m que son, entonces, las variables independientes.

Veamos cómo puede simbolizarse esta relación:

$a = g(f;m)$ o $a = t(f;m)$ etc.

Ambas expresiones se leen, respectivamente, así:

a es igual a g de f y de m o
a es igual a t de f y de m , etc.

Bien, en esta unidad vamos a trabajar con una sola variable independiente.

Ejemplos:

$f(x) = 2x+3$ o bien $y = 2x+3$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2$ o bien $y = \frac{1}{2}x^2$, etc.

Arribamos así a una definición de función que expresa:

> **y es función de x si a cada valor de x perteneciente a un conjunto A (llamado dominio) corresponde, según cierta ley o fórmula, un único valor de y perteneciente a un conjunto B (llamado codominio).**

¿Qué debemos establecer para expresar simbólicamente una función?

Debemos conocer:

- cuál es el dominio,
- cuál es el codominio, y
- cuál es la ley o fórmula por la cual se relacionan las variables.

Así con la notación:

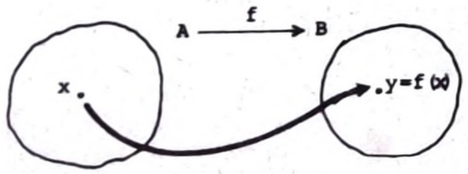
$$f : A \longrightarrow B \quad / \quad y=f(x)$$

(que se lee: **f** de **A** en **B** tal que **y** es igual a **f** de **x**)

Indicamos que la función **f** relaciona los elementos del conjunto **A** (dominio) con los elementos del conjunto **B** (codominio), según la fórmula $y = f(x)$.

También podemos recurrir a los diagramas de Venn para representar gráficamente tal función.

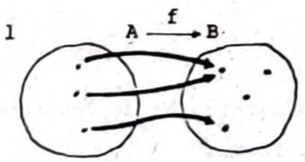
Así resulta:



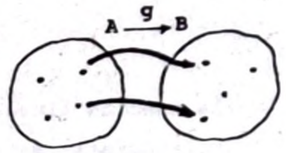
Le proponemos que analice las siguientes gráficas y que indique cuáles de ellas no corresponden a funciones de **A** en **B**.

Justifique cada respuesta:

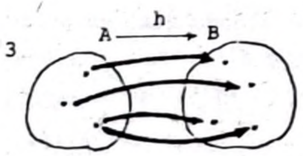
1



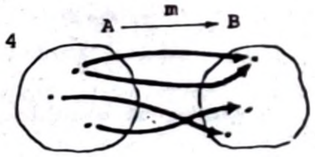
2



3



4



Coteje sus respuestas con las que siguen:

g no es función pues no se cumple la condición de existencia, es decir, hay elementos del primer conjunto que no tienen imagen.

Además, **h** tampoco es función pues no se cumple la condición de unicidad, ya que hay por lo menos un elemento del primer conjunto al que le corresponde más de un elemento del segundo conjunto.

Funciones escalares

A partir de este momento, vamos a interesarnos por un grupo particular de funciones.

¡Atención! Se trata de

> aquellas funciones cuyo dominio y codominio son conjuntos de números reales y que reciben el nombre de **funciones de variable real** o funciones numéricas o funciones escalares.

Funciones polinómicas

Función lineal

La función lineal es un tipo particular de las funciones polinómicas; éstas son de la forma:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = P(x)$ siendo $P(x)$ un polinomio.

Veamos un ejemplo:

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = 2x+3$

o bien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $y = 2x+3$

Decimos que es una función lineal pues es de la forma:

> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = P(x)$
>
> siendo $P(x)$ un polinomio de primer grado.

En nuestro ejemplo:

a) ¿Cuál es el dominio?

.....

b) ¿Cuál es el codominio?

.....

c) ¿Cuál es la fórmula?

.....

Esperamos que haya expresado lo siguiente.

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}$

c) $y = 2x + 3$

Ceros de una función

Indicamos con $f(x_1)$ el valor que toma la función f cuando $x=x_1$
Así, en el ejemplo anterior, 9 es el valor que toma la función para $x=3$, pues $f(3) = 9$.
-1 es el valor que toma la función para $x=-2$ pues $f(-2) = -1$, etc.

Explicitamos que:

$f(x_1)$ es la imagen de x_1 y que
x_1 es la pre-imagen de $f(x_1)$.

Ahora responda:
¿Cuál es la pre-imagen de -4?

.....

.....

¡Claro! es $-\frac{7}{2}$

Podemos anotar que el par ordenado $(x_1; f(x_1))$ pertenece a la función f.
O sea:

$(x_1; f(x_1)) \in f$

Luego, según lo visto:

$(3; 9) \in f$

$(-2; -1) \in f$, etc.

Entonces, enunciamos:

> Se denomina conjunto imagen al conjunto formado por todas las imágenes.

Si lo simbolizamos con **I**, resulta:

$9 \in I$, $-1 \in I$, etc.

Ahora, resuelva:

¿Para qué valor **k** de **x**, la imagen es nula?

.....

.....

En efecto, para $k = -\frac{3}{2}$ pues:

$$f(-\frac{3}{2}) = 2.(-\frac{3}{2})+3$$

$$f(-\frac{3}{2}) = 0$$

A este número $-\frac{3}{2}$ lo denominamos cero de la función **f**.

En general, podemos expresar:

> Cuando $f(k) = 0$ se dice que **k** es un cero de la función **f**.

¡Atención! Observe que $f(k) = 0$ equivale a $P(k) = 0$ siendo **P** el polinomio asociado a **f**.
Luego, los ceros de una función son las raíces del polinomio correspondiente.

Le proponemos determinar los ceros de dos funciones cualesquiera:

1) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = 4x-8$
2) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = 3x-1$

.....

.....

.....

¿Obtuvo los ceros pedidos?

Si la respuesta de la parte 1) es 2, ¡siga adelante!; de lo contrario, revise su trabajo.
Con respecto a la parte 2) ¿está de acuerdo con nosotros al decir que **g** no tiene ceros? ¿Por qué?

.....

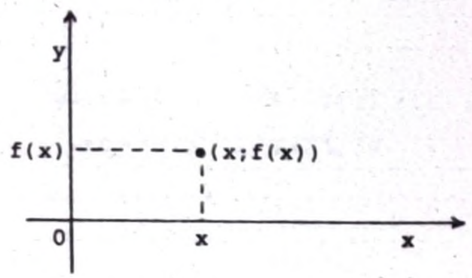
.....

Representación gráfica de una función

¿Cómo podemos hacerla? Bien, además de recurrir a los diagramas de Venn, es posible utilizar los puntos del plano, de la siguiente manera:

Sabemos que los números reales se identifican con los puntos de una recta (lo vimos a la Unidad I), luego para representar los pares $(x; f(x))$ de números reales, recurrimos a dos rectas perpendiculares a cuya intersección se la pone en correspondencia con el cero de ambas.

Así, el par (x; f(x)) puede representarse:



Donde:

> A la recta en la cual se coloca la primer componente del par, se la denomina eje de abscisas, y a la otra recta, eje de ordenadas.

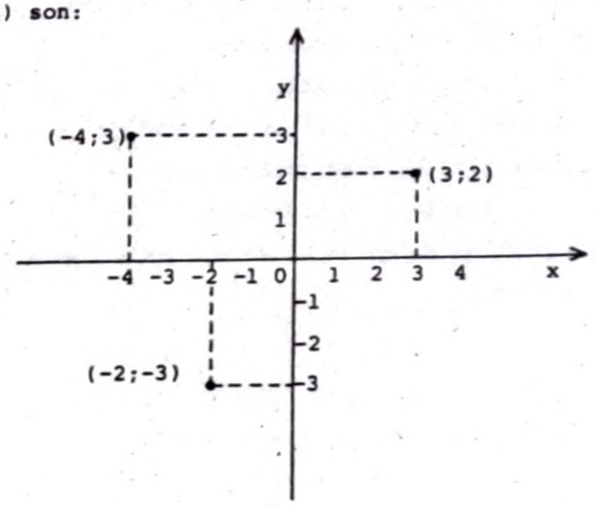
Sabemos que las flechas en los ejes sólo se colocan para indicar el sentido negativo-positivo de los mismos.

Por otro lado

> Cuando se consideran dos rectas en estas condiciones se dice que se tiene un sistema de ejes cartesianos ortogonales.

El punto que se obtiene en el plano es la **gráfica** del par considerado (x; f(x)), y
los números reales x y f(x) son las **coordenadas** de dicho punto (x es la abscisa, y f(x) es la ordenada).

Luego, las gráficas de los puntos (3; 2) y (-4; 3) y (-2; -3) son:



Entonces, concluimos:

> La **gráfica** de una función f es el conjunto de todos los puntos (x; f(x)).

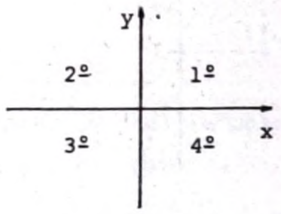
A continuación, enumeramos un conjunto de particularidades sobre este tema y que recomendamos tener presente:

1°) A cada punto del plano corresponde un único par ordenado de números reales y viceversa.
Luego, el conjunto de los puntos del plano se identifica con el conjunto de pares ordenados de números reales.

2°) Al trazar un par de ejes cartesianos ortogonales, el plano queda dividido en cuatro partes iguales, cada una de las cuales se denomina **cuadrante.**

Tal como nos ilustra el gráfico que sigue, el primer cuadrante es el determinado por los semiejes positivos de coordenadas; el segundo, por el semieje negativo de abscisas y el positivo de ordenadas.

De esta manera queda establecido un sentido para numerar los cuadrantes.



3°) No siempre es conveniente tomar la misma unidad en ambos ejes.

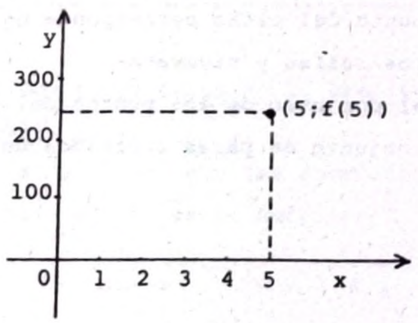
A través de un ejemplo podemos ampliar este aspecto.

Siendo $f(x) = 10x^2 + x - 1$, representar $(5; f(5))$.

Como $f(5) = 10.5^2 + 5 - 1 = 254$, el punto a representar es $(5; 254)$.

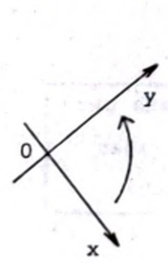
¿De qué forma podríamos representarlo?

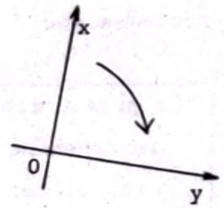
Una escala conveniente podría ser:



4°) Según el tema que se esté tratando, es conveniente rotar los ejes con respecto a la figura anterior.

De esta manera:





Quizás ahora su pregunta sea: ¿en qué casos conviene rotar los ejes?

Por ejemplo, cuando se estudia el movimiento de un cuerpo sobre un plano inclinado, resulta útil que uno de los ejes coordenados tenga la misma dirección que el plano inclinado.

Bien, para representar una función considerando un sistema de ejes cartesianos ortogonales, le proponemos el siguiente ejemplo:

Dada la función lineal

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad h(x) = -3x + 3$$

o bien

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad y = -3x + 3$$

(forma explícita de la fórmula pues la variable dependiente y figura sola en un miembro).

¿Cuál es la intersección de su gráfica con el eje de abscisas?

.....

¿Su respuesta es el par (1; 0)?

A propósito, acotamos que:

> La primer componente de este par se denomina **abscisa al origen** (es el cero de la función).

¿Y cuál es la intersección de la gráfica con el eje de ordenadas?

.....

Seguramente, usted respondió: es el par (0; 3) ¿no es cierto?

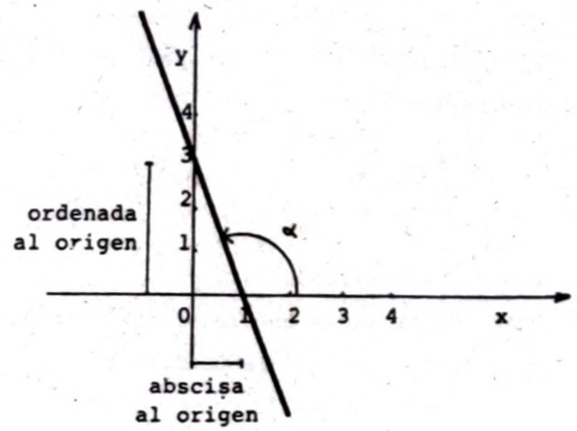
También aquí especificamos que:

> La segunda componente de este par es $3 = f(0)$ y se llama **ordenada al origen.**

Por otra parte:

> La abscisa y la ordenada al origen se denominan **coordenadas al origen.**

Vayamos al gráfico correspondiente:



Tal como podemos apreciar, si la recta no pasa por el origen de coordenadas, conociendo las coordenadas al origen es posible -rápidamente- graficar la función.

¿Qué sucede si la recta pasa por el origen de coordenadas?

.....

.....

Por otro lado, recordemos que:

Dado que el **ángulo** α (que el semieje positivo de abscisas forma con la recta) es **obtuso**, se dice que la recta tiene **pendiente negativa** (obsérvese que el coeficiente principal de la fórmula también es negativo; dicho coeficiente mide la pendiente cuando se trabaja en ambos ejes con la misma escala, es decir, es la tangente trigonométrica de α).

¿Qué ocurriría si α fuese agudo?

.....

.....

Si su respuesta es: la recta tendría pendiente positiva, ¡muy bien!
Además, el coeficiente principal sería positivo y éste es el que mide la pendiente.

Ahora, otro planteo para usted:
¿Qué posición particular tiene una recta con respecto a los ejes coordenados, si se sabe que la pendiente de la misma es nula?

.....
.....

Así es: la recta es paralela al eje de abscisas.

Con este caso recién señalado, arribamos a la...

Función constante

Ejemplos:

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; h(x) = 2$
$j: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; j(t) = -3$ etc.

En el primer caso, cualquiera sea el valor de **x**, su imagen es 2, y en el segundo, cualquiera sea el valor de **t**, su imagen es -3.

En consecuencia, expresamos:

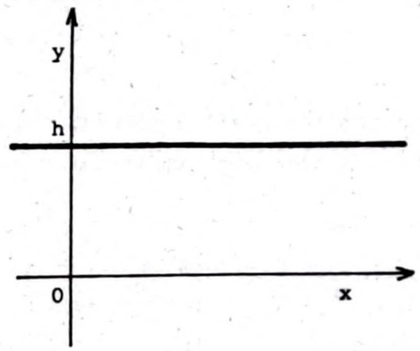
> **Las funciones que asignan a todos los elementos del dominio la misma imagen, se denominan funciones constantes.**

¿Cómo se simbolizan?

En general, así:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = h$ con $h \in \mathbb{R}$

Con respecto a la representación gráfica:



¡Lápiz y papel! A continuación, le presentamos un conjunto de actividades que le darán la oportunidad de afianzar y aplicar lo que hasta aquí estudió.
Ah... Si es necesario, revise los temas que aún le ofrecen alguna dificultad de comprensión.

ACTIVIDADES

1) Grafique las funciones:

a) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

2) Compare las gráficas de f y g, indique la diferencia entre las mismas y justifique su respuesta.

.....

.....

.....

.....

3) Indique si el conjunto imagen de f y el de g son o no iguales.

.....

.....NO.....

.....

4) ¿Cómo es la pendiente de la recta correspondiente a g?
¿Cuánto vale?

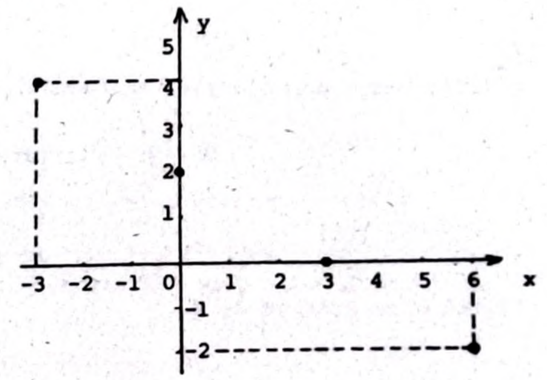
.....NO es $-\frac{2}{3}$.....

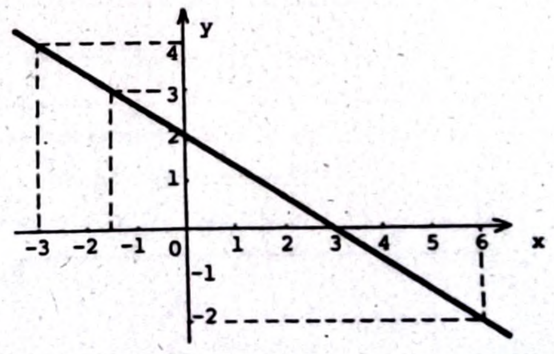
.....

RESPUESTAS

1) Para la gráfica de f, podemos hacer un **cuadro de valores** y volcar esta información en un sistema de ejes cartesianos ortogonales.
Análogo procedimiento podemos emplear para la gráfica de g, o bien, tal como vimos antes, recurrir a las coordenadas al origen.

x	f(x)	g(x)
$-\frac{3}{2}$	-	3
-3	4	4
0	2	2
3	0	0
6	-2	-2





2) La gráfica de **f** está formada por puntos aislados pertenecientes a una recta, mientras que **la gráfica de g es dicha recta "contínua", pues g es una función lineal.** Tal diferencia se debe a que el dominio de **f** no es $\mathbb{R}$; en cambio, el de **g** sí lo es.

3) Los conjuntos imágenes de **f** y de **g** no son iguales pues el de **f** está formado por puntos aislados, mientras que el de **g** es $\mathbb{R}$.

4) La pendiente de la recta correspondiente a **g** es negativa y vale $-\frac{2}{3}$.

Función biyectiva

Consideremos, por ejemplo, la función lineal:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = 2x - 5$$

Le pedimos que:

1) Trace la gráfica de **f**.

2) Responda a las siguientes preguntas, observando la gráfica de **f**:

a) Dos valores distintos y cualesquiera de **x** ¿tienen imágenes diferentes?

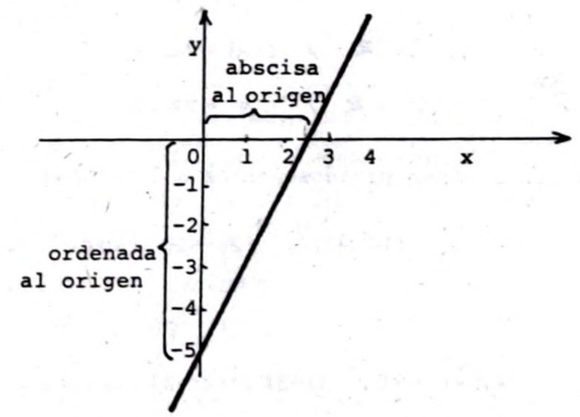
.....

b) ¿Cómo es el conjunto imagen con respecto al codominio de la función?

.....

Compare sus respuestas con las que siguen:

1) La gráfica de **f** es:



2) a) SI. Esto da lugar al enunciado siguiente:

> Una función es **inyectiva** si y sólo si dos valores distintos y cualesquiera de **x** tienen imágenes diferentes.

b) Son conjuntos iguales. Luego, podemos expresar:

> Una función es **sobreyectiva** si y sólo si el conjunto imagen resulta igual al codominio de la función.

Por último:

Una función es biyectiva si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

Función inversa

Para llegar a este concepto, primero le proponemos retomar el ejemplo dado en el bloque anterior (correspondiente a una función biyectiva).

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = 2x - 5$$

o bien

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad y = 2x - 5$$

Escribamos algunos pares pertenecientes a la misma:

$$(0; -5)\ ,\ (1; -3)\ ,\ (2; -1)\ ,\ \text{etc.}$$

O sea:

$$f = \{ (0;-5)\ ,\ (1;-3)\ ,\ (2;-1)\ ,\ldots \}$$

Luego, conmutemos las componentes de cada uno de estos pares y analicemos si se obtiene una función.

En caso afirmativo ¿es o no biyectiva?

.....

.....

Tenemos, así, que: (-5;0), (-3;1), (-1;2),... etc. son los elementos de un nuevo conjunto, que sí es una función biyectiva a la que simbolizamos f^{-1} y denominamos función inversa de f.

Luego:

$$f^{-1} = \{ (-5;0), (-3;1), (-1;2), \ldots \}$$

Ahora deduzca:

¿Siempre que conmutemos los componentes de los pares de una función, obtendremos otra función?

.....

¿En qué casos?

.....

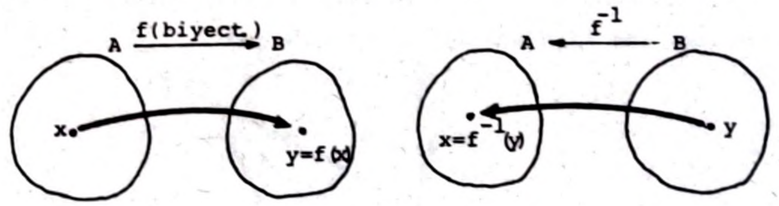
.....

.....

Ya estamos en condiciones de definir:

Si $f: A \to B$ es biyectiva, entonces existe una función $f^{-1}: B \to A$ que se denomina inversa de f y tal que: si $(x;f(x)) \in f$ entonces $(f(x);x) \in f^{-1}$ o bien, si $(x;y) \in f$ entonces $(y;x) \in f^{-1}$.

¿Qué le parece si graficamos lo expresado anteriormente?



Para responder:

¿Cómo es, entonces, el dominio de f^{-1} con respecto al codominio de f?

.....

¿Y cómo es el codominio de f^{-1} con respecto al dominio de f?

.....

¡Claro! Son iguales en ambos casos.

¿Cómo se obtiene la fórmula inversa de una función dada?

Retomemos nuestro ejemplo: $y = 2x - 5$

Primero, despejamos la variable **x**:

$$x = \frac{y + 5}{2}$$

y así obtenemos la fórmula buscada, siendo:

y la variable independiente, y

x la variable dependiente.

Pero... como se acostumbra que **x** sea la variable independiente e **y** la dependiente, conmutamos las variables en la fórmula anterior.

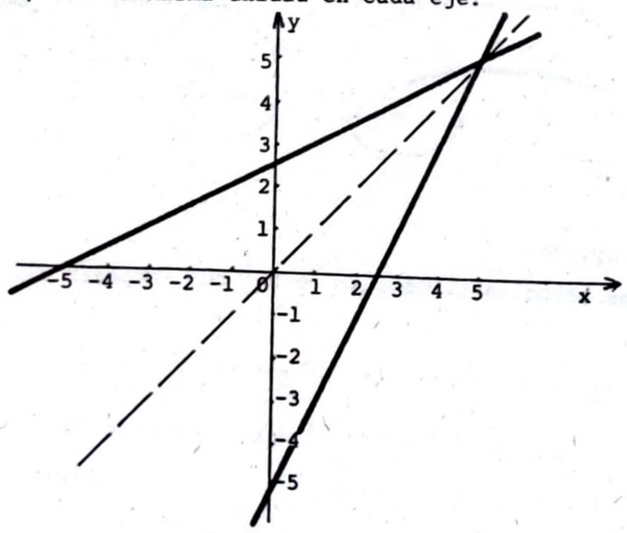
Así resulta:

$$y = \frac{x + 5}{2}$$

Luego:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

Ahora, grafiquemos **f** y f^{-1} en un sistema de ejes cartesianos ortogonales, con la misma unidad en cada eje:



¿Puede responder cómo son ambas rectas con respecto a la que incluye a la bisectriz del primer cuadrante?

.....

Esperamos que haya advertido que ambas rectas son simétricas.

Una aclaración pertinente: esta observación es válida para la gráfica de cualquier función y la de su inversa.

¿A qué llamamos composición de funciones?

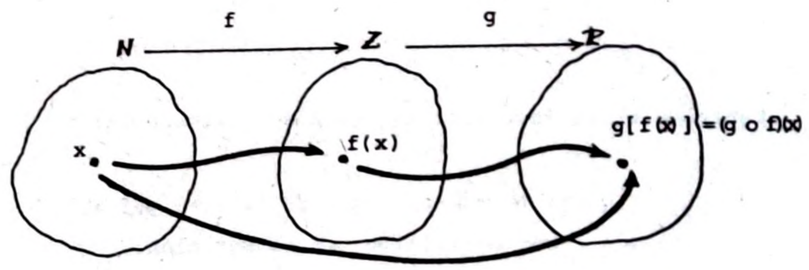
Consideremos dos funciones cualesquiera tales que el codominio de la primera sea igual al dominio de la segunda (también puede hablarse de inclusión y no de igualdad)

Ejemplo:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \quad / \quad f(x) = x+1$$
$$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \quad / \quad g(x) = x^2$$

Nos interesa hallar una función que nos permita asignar a cada elemento del dominio de **f**, un único elemento del codominio de **g**.

Veámoslo gráficamente:



¿Cómo podemos hallarlo?

Un camino muy accesible es hallar una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ tal que la imagen de todo $x \in \mathbb{N}$ quede determinada obteniendo primero f(x), y luego, la imagen de este elemento por g.

Esta función se simboliza:

$$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ / \ (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

¿Cómo se lee?

f compuesta con g de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ tal que
la imagen de x es g de f de x.

O bien:

g cerito f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ tal que...

Ahora resuelva:

¿Qué función se obtiene en nuestro ejemplo?

.....
.....
.....
.....

Controle si su respuesta es igual a la siguiente:

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ / \ (g \circ f)(x) = g[f(x)]$
por definición de composición.

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ / \ (g \circ f)(x) = g[x+1]$
pues $f(x) = x+1$

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ / \ (g \circ f)(x) = (x+1)^2$
pues $g(x) = x^2$

¿Podría efectuarse: f o g? ¿Por qué?

.....
.....

Si usted respondió: tal composición no es posible pues el codominio de g no es igual al dominio de f, ¡bravo, ha comprendido el tema!
De lo contrario, revea los conceptos involucrados ¡Animo!

Supongamos, ahora, la composición de dos funciones inversas.
Ya habíamos visto las funciones:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = 2x-5$$

y

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

Le pedimos que obtenga f compuesta con f^{-1}, o sea, $(f^{-1} \circ f)$, y luego, f^{-1} compuesta con f, es decir: $(f \circ f^{-1})$.

$$F^{-1} \circ F = F^{-1}(2x-5) =$$

$$F^{-1}(2x-5) = \frac{(2x-5)+5}{2} = x$$

Compare su trabajo con la secuencia siguiente:

En el primer caso tenemos:

$$f^{-1} \text{ o } f: \mathcal{R} \to \mathcal{R} \quad / \quad (f^{-1} \text{ o } f)(x) = f^{-1}[f(x)]$$

por definición de composición.

$$f^{-1} \text{ o } f: \mathcal{R} \to \mathcal{R} \quad / \quad (f^{-1} \text{ o } f)(x) = f^{-1}(2x-5)$$

pues $f(x) = 2x-5$

$$f^{-1} \text{ o } f: \mathcal{R} \to \mathcal{R} \quad / \quad (f^{-1} \text{ o } f)(x) = \frac{2x-5+5}{2}$$

pues $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

$$f^{-1} \text{ o } f: \mathcal{R} \to \mathcal{R} \quad / \quad (f^{-1} \text{ o } f)(x) = x$$

De ahí podemos concluir que:

La imagen de un elemento **x** cualquiera del primer conjunto es el mismo elemento.

Por tal razón, se dice que:

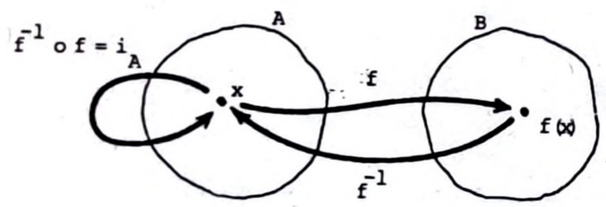
La función que resulta de componer f con f^{-1} es la función **identidad** en el primer conjunto.

En general, se simboliza:

$$f^{-1} \text{ o } f = i_A$$

Se lee: identidad en A (siendo A el primer conjunto).

Vayamos al gráfico correspondiente:



Análogamente ¿qué obtendría si efectuara la composición de f^{-1} con f? Verifíquelo.

.....

.....

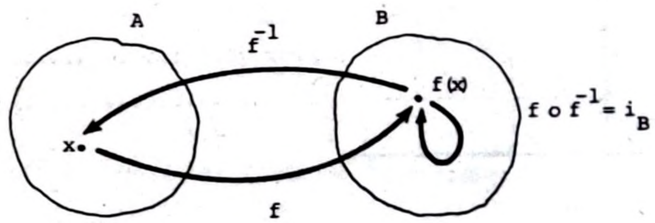
¡Claro! Obtendría la función identidad en el segundo conjunto

Se simboliza:

$$f \text{ o } f^{-1} = i_B$$

(siendo B el segundo conjunto)

Gráficamente resulta:



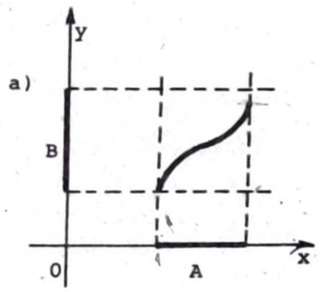
EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página 218)

EJERCICIO N° 1

Tache SI o NO según corresponda para indicar cuáles de las siguientes gráficas son funciones definidas de A en B.
Sobre la línea de puntos justifique cada respuesta.

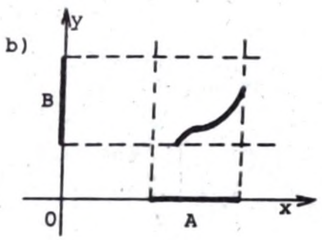
a)



(SI)	NO

¿Por qué? Interseca la recta en dos puntos

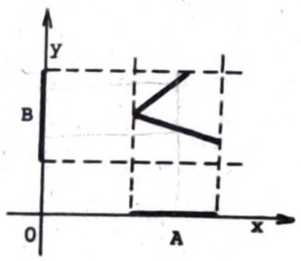
b)



SI	(NO)

¿Por qué? .....
.....

c)



SI	(NO)

¿Por qué? .....
.....

EJERCICIO N° 2

1° PARTE

Complete cada una de las columnas del siguiente cuadro según corresponda.

	FUNCION	DOMINIO	CODOMINIO	f(3)	CEROS
a)	$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \ / \ f(x) = 4x$	N	N_0	12	—
b)	$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \ / \ f(t) = t-3$	Z	R	0	3
c)	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(s) = 2s+5$	R	R	11	$-\frac{5}{2}$

2° PARTE

Complete las siguientes columnas según corresponda.

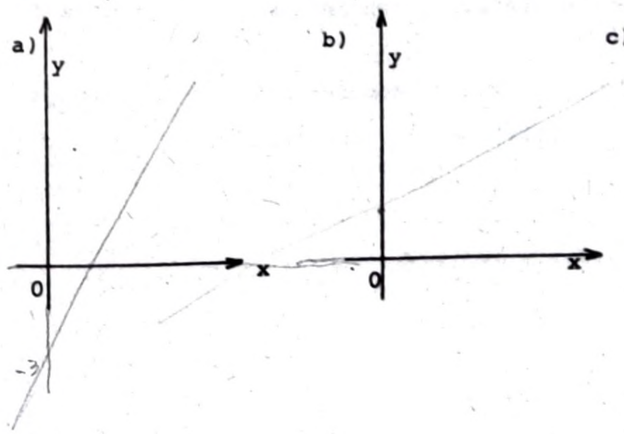
	FUNCION	ABSCISA AL ORIGEN	ORDENADA AL ORIGEN	PENDIENTE
a)	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = 3x-3$	1	-3	POS
b)	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = \frac{1}{4}x+2$	-8	2	POS
c)	$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ h(x) = -4x$	0	0	NEG

$y = mx + b$

3° PARTE

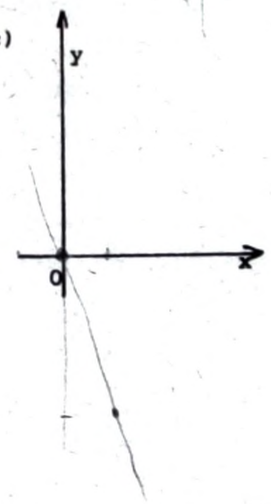
Represente gráficamente las funciones que acaba de analizar.

a)



b)

c)



4° PARTE

Exprese la función inversa de cada una de las funciones que acaba de graficar.

$3x-3=y$
$3x=y+3$
$x=\frac{y+3}{3}$

a) ..... $y=\frac{x+3}{3}$

$\frac{1}{4}x+2=y$
$\frac{1}{4}x=y-2$
$x=\frac{y-2}{\frac{1}{4}}$
$y=x-2 \cdot \frac{4}{1}$

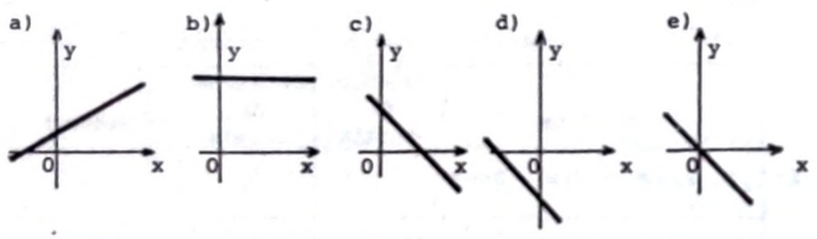
b) ..... $y=x-2 \cdot 4$

$-4x=y$
$x=\frac{y}{-4}$

c) ..... $y=\frac{x}{4}$

EJERCICIO N° 3

Marque una cruz en el recuadro de la/s gráfica/s que podría/n corresponder a f, siendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = a_1x + a_0$ con $a_1 < 0$ y $a_0 \leq 0$.



a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) X e) X

EJERCICIO N° 4

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \frac{4}{3}x + 1$

Exprese sobre la línea de puntos dos funciones lineales tales que sus respectivas gráficas sean rectas paralelas a la de f y además:

- Una pase por el origen de coordenadas y la otra tenga ordenada al origen negativa.

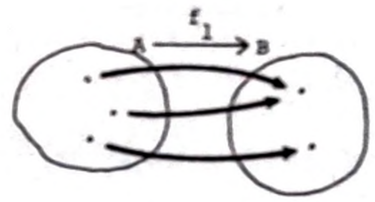
.....
.....

EJERCICIO N° 5

1° PARTE

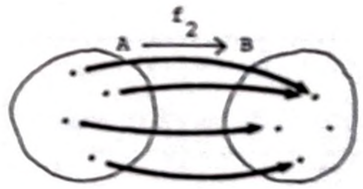
Sobre la línea de puntos escriba inyectiva, sobreyectiva, o biyectiva según resulten cada una de las siguientes gráficas.

a)



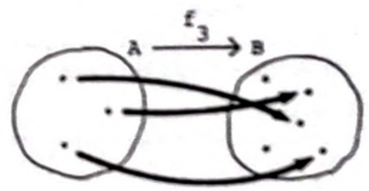
sobreyec.....

b)



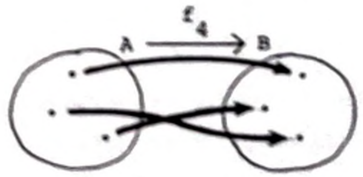
.....

c)



inyect.....

d)



inyec-sobr.....

2° PARTE

Indique cuál o cuáles de las funciones que acaba de clasificar admite/n inversa. Justifique su respuesta.

d.....
.....
.....
¿Por qué? .....

EJERCICIO N° 6

Dadas las siguientes funciones lineales:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = 4x - 8$$
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

Obtenga y consigne sobre la línea de puntos

a) f compuesta con g $g \circ f = g[f_x] = g(4x-8) = -\frac{1}{2}(4x-8)+1$ $-2x+5$

b) g compuesta con f $f \circ g = f[g_x] = f\left(-\frac{1}{2}x+1\right) = 4\left(-\frac{1}{2}x+1\right) - 8$ $-2x-4$

c) (g o f)(3) -1

d) el cero de f o g -2

Fto $g \circ f = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / (g \circ f)(x) = g(4x-8) = -\frac{1}{2}(4x-8)+1 = -2x+5$

$f \circ g = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / (f \circ g)(x) = f\left(-\frac{1}{2}x+1\right) = 4\left(-\frac{1}{2}x+1\right) - 8 = -2x-4$

Otras funciones polinómicas

Función cuadrática

Analicemos la función:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x^2 - 4x - 5$$

o bien

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = (x-5)(x+1)$$

La misma es un ejemplo de función cuadrática ya que es de la forma:

> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = P(x)$
>
> Siendo P(x) un polinomio de segundo grado.

Por otra parte:

> La gráfica de esta función se denomina parábola.

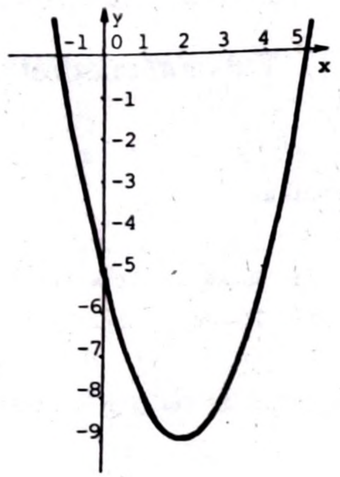
Ahora nos ocuparemos de cómo trazar la parábola de tal función.

Para ello, conviene conocer los ceros de la función. Esos ceros son: 5 y -1 (según hemos visto en el módulo II, pág. 28; y en este Módulo, pág. 12).

Luego, las intersecciones de la parábola con el eje de abscisas son (5; 0) y (-1; 0).
Análogamente, la intersección con el eje de ordenadas se obtiene para x=0, luego es el par (0;-5).

Observemos la figura siguiente:

x	f(x)
1	-8
2	-9
3	-8
4	-5
...	...



¿Qué conceptos podemos enunciar después de observar dicha figura?

a) La parábola es cóncava hacia las ordenadas positivas (ello se debe a que el coeficiente principal de la fórmula de **f** es positivo) y se simboliza: ∪
En caso contrario, se simboliza: ∩

b) La recta perpendicular al eje de abscisas que pasa por x=2, es **eje de simetría de la parábola.**
Dado que todos los puntos de esta recta tienen la misma abscisa, dicha recta queda caracterizada por este valor y puede anotarse:

eje: x = 2

Esto se lee: el eje es la recta de ecuación equis igual dos.

c) La intersección de la parábola con su eje de simetría es un punto llamado **vértice de la parábola**, cuya abscisa es 2 por pertenecer al eje de la parábola.
Su ordenada es f(2) o sea: -9
Luego, el vértice es el punto:

V = (2;-9)

El planteo que surge es:

¿Cómo se halla la expresión correspondiente al eje de la parábola?

Le anticipamos: muy fácilmente...

Hallemos el promedio de las abscisas de dos puntos cualesquiera de la parábola que equidisten del eje.

Por ejemplo, los puntos pueden ser:

$A = (-1; 0)$ y $B = (5; 0)$

Así:

$$\frac{-1+5}{2} = 2$$

También los puntos pueden ser:

$C = (1; -8)$ y $D = (3; -8)$

Así:

$$\frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{etc.}$$

¿Qué obtenemos en todos los casos?
Pues el número 2.

Por tal razón:

eje: x=2

Le proponemos hacer el enunciado general del tema que acabamos de tratar.

Si $(x_1; h)$ y $(x_2; h)$ son dos puntos de una parábola que equidistan de su eje, la expresión correspondiente al eje de la misma es:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Ahora consideremos otra función polinómica.

De grado n>2

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = -x^3 + x^2 + 8x - 12$$

o bien

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = -(x+3)(x-2)^2$$

Veamos cómo hacer para representar gráficamente esta función.

Es conveniente proceder en forma similar a lo que hemos visto en función cuadrática, es decir, hallar las intersecciones de la curva con los ejes coordenados y luego, tener una "idea" más aproximada de la curva, haciendo un cuadro de valores.

Así ¿cuáles son las intersecciones de la gráfica con el eje de abscisas?

.....

.....

¿Su respuesta es igual a la siguiente?
Son los puntos (-3; 0) y (2; 0) pues -3 y 2 son los ceros de la función.

Dado que 2 es un cero doble o de multiplicidad par, la gráfica será tangente al eje de abscisas, pero sin "cortarlo".

¿Cuál es la intersección de la gráfica con el eje de ordenadas?

.....

.....

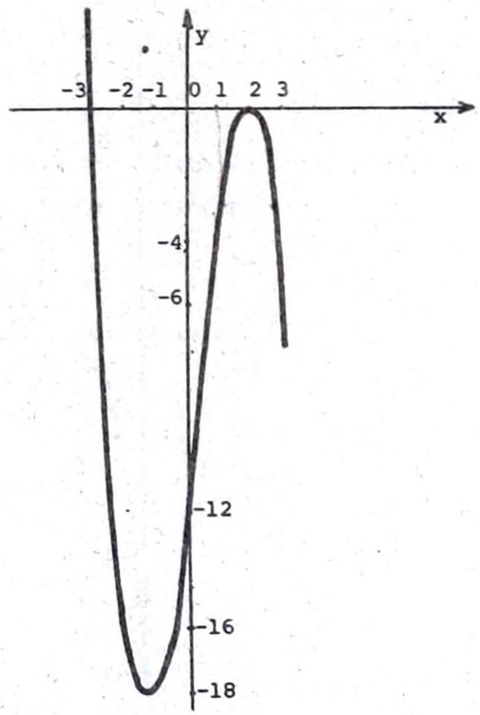
Bien, es el par (0;-12), pues f(0)=-12.

¿Qué cuadro de valores propondría para tener más información con respecto al trazado de la curva?
Escríbalo:

Puede ser, por ejemplo:

x	y = f(x)
-4	36
-2	-16
-1	-18
1	-4
3	-6
...	...

Por lo tanto, la gráfica es, aproximadamente:



Quizás, usted se pregunte cómo trazar una curva con mayor exactitud. Para ello, debe efectuarse un estudio de la función correspondiente.
Y este tema lo desarrollaremos en el curso de Análisis Matemático I.

Vayamos a otro ejemplo de función polinómica.

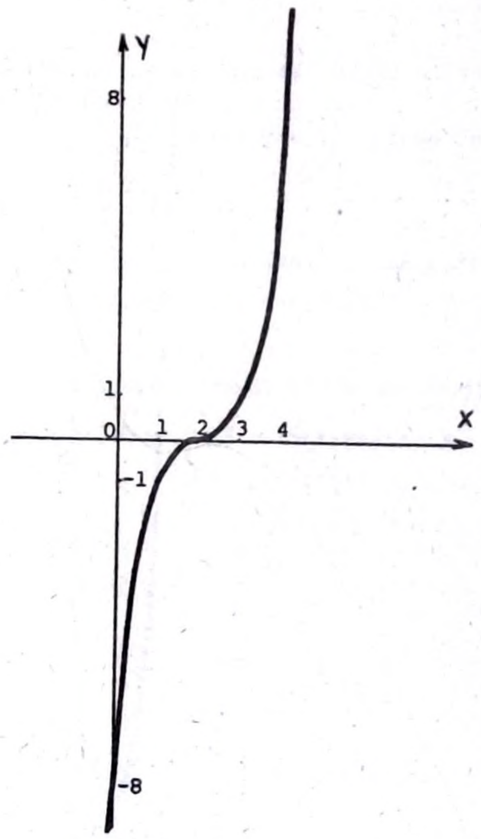
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

o bien

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = (x-2)^3$$

En este caso, la intersección de la gráfica con el eje de abscisas es (2; 0).
Dado que 2 es un cero de la función con multiplicidad impar pues es de multiplicidad tres, la gráfica es tangente al eje de abscisas y, además, lo "corta".
La intersección con el eje de ordenadas es (0; -8).
Luego:

x	y = f(x)
0	-8
1	-1
2	0
3	1
4	8
...	...



EJERCITACION

Las respuestas figuran en página 221).

EJERCICIO N° 7

1° PARTE

Complete cada una de las columnas del siguiente cuadro según corresponda.

	FUNCION	CONCAVIDAD (+) o (-)	CEROS	ECUACION DEL EJE	VERTICE	CONJUNTO IMAGEN	INTERSECCION CON EL EJE DE ORDENADAS
a)	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2+4x-12$	(+)	2; -6	-2	-16	$[-16; +\infty)$	-12
b)	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(t) = -2t^2+3t+9$	(-)	$-\frac{3}{2}$; 3	$\frac{3}{4}$	$\frac{81}{8}$	$(-\infty; \frac{81}{8}]$	9
c)	$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(z) = z^2+4$	(+)	/	0	4	$[4; +\infty)$	4

x	y
1	5
2	8
3	13
0	4
-1	5

$-\frac{9}{8}+\frac{9}{4}+9 = \frac{-9+18+72}{8} = \frac{81}{8}$

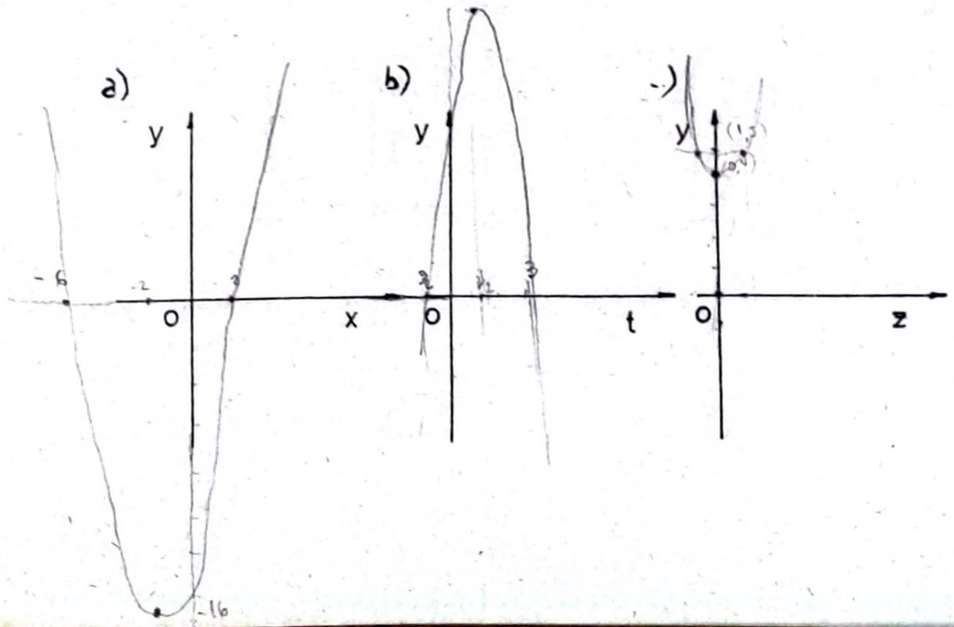
$z^2+4=0$

$z^2=-4$

$z=\sqrt{-4}$

2° PARTE

Represente gráficamente las parábolas correspondientes a cada una de las funciones que acaba de analizar.



3° PARTE

Tache SI o NO según corresponda, luego justifique su respuesta.

¿Las funciones graficadas admiten inversas? | SI | | NO |

¿Por qué? .....

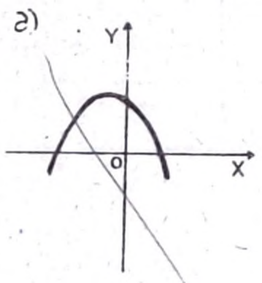
EJERCICIO N° 8

Escriba en el recuadro en blanco la/s letra/s de la/s gráfica/s que pueda/n corresponder a **f**, siendo

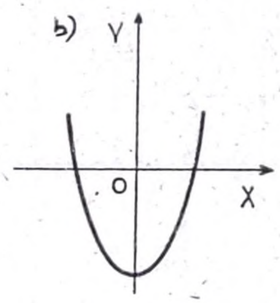
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

con $a_2 > 0$ y $a_0 \leq 0$.

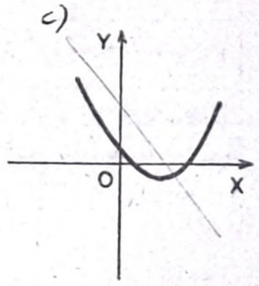
a)



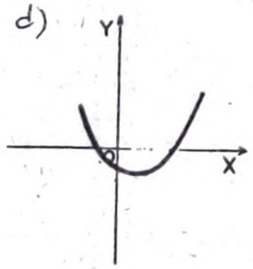
b)



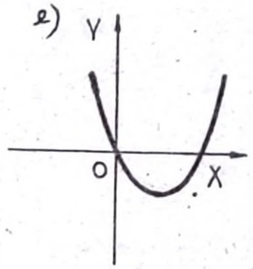
c)



d)



e)



Funciones algebraicas racionales no enteras o fraccionarias

Comencemos con estos ejemplos:

1) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

2) $g: \mathbb{R} - \{-2, 1\} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = \dfrac{-x^4 - x^3 + 2x^2}{x^2 + x - 2}$

¿Qué puede expresar con respecto a los segundos miembros de las fórmulas de estas funciones?

.....

¡Claro! Son expresiones racionales no enteras.

En general:

> Las funciones racionales no enteras son del tipo:
> $$f: \mathbb{R} - A \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
> siendo $Q(x) \neq 0$ y de una constante.

Por otra parte, el dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales excepto aquellos que anulan al denominador $Q(x)$.

¿Cómo trazar la gráfica de una función de este tipo?

Pues bien, suele procederse de la forma siguiente:

Tomemos el ejemplo 1):

$$f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x-1}$$

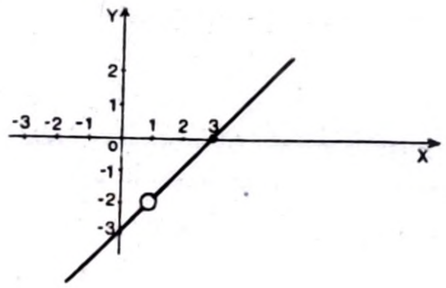
Lo primero que hacemos es simplificar los factores comunes al numerador y al denominador, si los hubiere.
Así:

$$f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{x-1}}$$

Después, escribimos la función dada con el mismo dominio y codominio, pero con una fórmula distinta.
Veamos:

$$f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x-3$$

He aquí la gráfica correspondiente:



Podemos apreciar que esta gráfica es una recta a la que le falta el punto de abscisa 1, pues este número no pertenece al dominio de la función.

Conteste estas cuestiones:
¿Cuál es el conjunto imagen?

.....

Esta función ¿tiene inversa?

.....

.....

Esperamos que sus respuestas coincidan con las que siguen:

El conjunto imagen de f es $\mathbb{R}-\{-2\}$.
Por su parte, f no admite inversa pues no es biyectiva ya que no es sobreyectiva.
¿Quedó claro? O ¿es conveniente repasar algún tema?

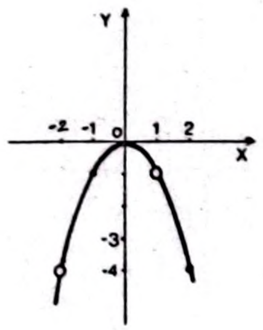
Nos queda tomar el ejemplo 2). Procederemos en forma similar al anterior.

Sea: $g: \mathbb{R}-\{-2,1\} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = \dfrac{-x^4 - x^3 + 2x^2}{x^2 + x - 2}$

Luego: $g: \mathbb{R}-\{-2,1\} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = \dfrac{\cancel{-x^2(x^2 + x - 2)}}{\cancel{x^2 + x - 2}}$

$$g: \mathbb{R}-\{-2,1\} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = -x^2$$

Observemos la gráfica:



Nos damos cuenta que es una parábola a la que le faltan dos puntos.

Nos gustaría que usted busque las respuestas a los siguientes interrogantes:

¿Por qué a esa parábola le faltan dos puntos?
¿Cuáles son esos puntos?
¿Cuál es el conjunto imagen?
¿Tiene inversa esa función? ¿Por qué?

EJERCITACION

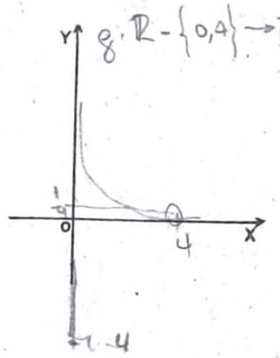
(Las respuestas figuran en la página 222).

EJERCICIO N° 9

1° PARTE

Grafique la siguiente función.

$$g: \mathbb{R}-\{0,4\} \to \mathbb{R} \;/\; g(x) = \frac{x-4}{x^2-4x}$$



2° PARTE

Escriba los ceros de g en el casillero en blanco.

3° PARTE

Exprese el conjunto imagen de g.

I= .....

Otras funciones escalares

Función valor absoluto o Funcion módulo

Así la definimos:

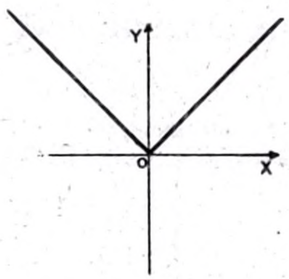
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = |x|$$

o bien

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x): \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Le recomendamos volver a la unidad I para repasar este aspecto.

En cuanto a la gráfica, está formada por las bisectrices del primer y segundo cuadrantes.



¿Cuál es el conjunto imagen?

.....

Queremos aclarar que esta función y la que sigue, han sido definidas a través de más de una fórmula. Ello puede suceder con muchas otras funciones.

Función signo

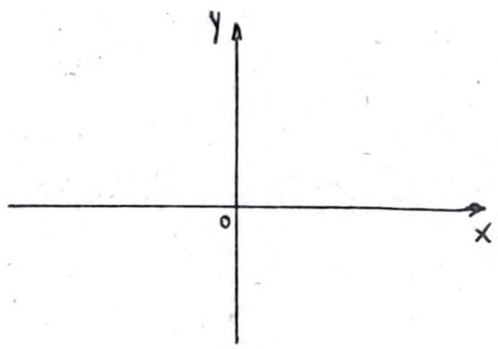
Damos la siguiente definición:

$$g: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = \frac{|x|}{x}$$

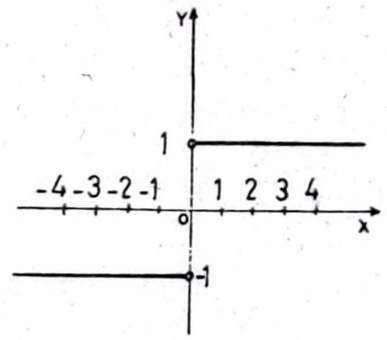
o bien

$$g: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R} \ / \ g(x): \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in (0; +\infty) \\ -1 & \text{si} \quad x \in (-\infty; 0) \end{cases}$$

¿Se anima a graficarla ? ¡Adelante!



Verifique su trabajo con el nuestro:



Vemos que la gráfica está formada por dos semirrectas "sin origen", paralelas al eje de abscisas.

¿Cuál es el conjunto imagen? $I = \{1; -1\}$

Función parte entera

Ante todo, vamos a definir parte entera de un número real **k**, a la que simbolizamos: ent(k).

> La parte entera de un número real **k** es el mismo número **k** si éste es entero. Si no lo es, la parte entera es el número entero menor que **k**, más próximo a él.

Ilustremos lo dicho con ejemplos:

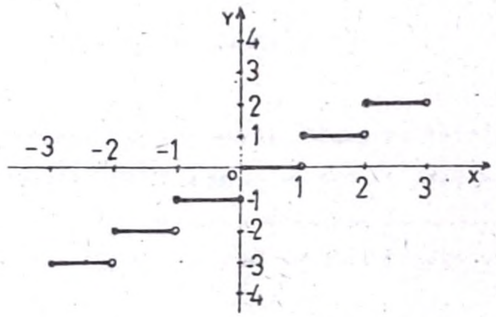
$ent(2) = 2$ $\qquad$ $ent(\frac{2}{3}) = 0$

$ent(-3) = -3$ $\qquad$ $ent(-\frac{5}{4}) = -2$ $\qquad$ etc.

Luego:

> **La función parte entera se define**
>
> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = ent(x)$

Al graficarla, resulta:



Usted puede apreciar que la gráfica está formada por segmentos escalonados a los que les falta el extremo derecho.

A partir de este bloque, vamos a estudiar otro grupo particular de las funciones numéricas:

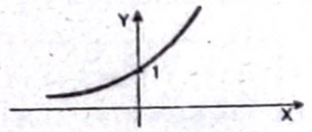
Funciones trascendentes

Función exponencial

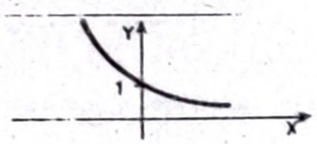
Seguramente, las últimas funciones dadas han sido "novedosas" para usted... ¿Es así? ¿Las había visto antes?

En cambio, debe recordar funciones de la clase:

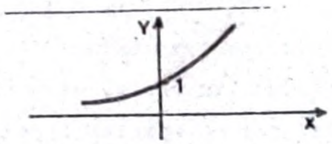
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; / \; f(x) = 3^x$



$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; / \; g(x) = (\frac{1}{3})^x$



$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; / \; h(x) = e^x$



A propósito... ¿recuerda qué tipo de número es $e = 2,718...$?

¡Cierto, es un número irracional!

Bien, a partir de los ejemplos dados observamos que:

1) El dominio de las funciones es el conjunto de los números reales.

2) En las fórmulas de las funciones figuran potencias donde la variable independiente es el exponente, y la base es un número positivo pero distinto de uno.

Las funciones de este tipo se llaman **exponenciales** y las simbolizamos así:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = a^x \quad (\text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1)$$

Ahora responda:

¿Cuál es, en todos los casos, el conjunto imagen?

.....

Estas funciones ¿admiten inversas?

.....

Coteje sus respuestas:

En todos los casos, el conjunto imagen es $\mathbb{R}^+$, y estas funciones no admiten inversas pues no son biyectivas, al no ser sobreyectivas.

Función logarítmica

Por otra parte:

Cuando a la función exponencial la definimos de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, resulta biyectiva y, por lo tanto, admite inversa.
Denominamos **función logarítmica** a esta función inversa.

¿Qué le parece si recordamos la definición de logaritmo?

Se llama **logaritmo** de un número **b** (siendo $b > 0$) respecto de la base **a** (siendo $a > 0$ y $a \neq 1$) al número **c** al que hay que elevar a la base **a** para obtener el número **b**.

En símbolos:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad (b > 0, a > 0 \text{ y } a \neq 1)$$

Ejemplos:

$\log_3 81 = 4$ pues $3^4 = 81$

$\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$ pues $32^{\frac{1}{5}} = 2$

$\log_{\frac{1}{64}} 4 = -3$ pues $\left(\frac{1}{64}\right)^{-3} = 4$ etc.

$\frac{1}{64}$ 64^3 $\sqrt[3]{64}$

Algunos aspectos a tener en cuenta:

a) Cuando la base es 10, no se escribe; se sobreentiende.

b) Cuando la base es el número irracional $e = 2{,}718...$ la notación usual es: ln (que se lee: logaritmo natural).

¿Recuerda usted las propiedades de los logaritmos?
Para ello le proponemos completar las siguientes igualdades:

$\log_a x.y =$	+	si $x>0$, $y>0$
$\log_a \frac{x}{y} =$	-	si $x>0$, $y>0$
$\log_a x^y =$		si $x>0$

Ahora compare su trabajo con lo que sigue:

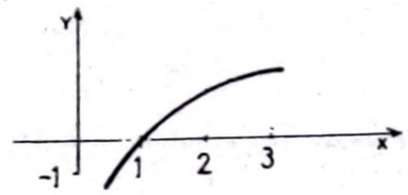
$\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$		si $x>0$, $y>0$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$		si $x>0$, $y>0$
$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$		si $x>0$

Llegamos así a la definición de funciones logarítmicas:

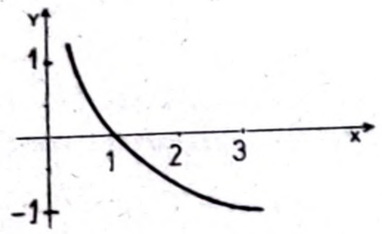
$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = \log_a x \quad (a>0 \text{ y } a\neq 1)$

Pasemos a algunos ejemplos de estas funciones y a sus respectivas gráficas:

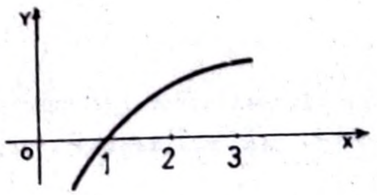
$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = \log_3 x$



$g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \;/\; g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \;/\; h(x) = \ln x$



EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página 223).

EJERCICIO N° 10

Resuelva las siguientes cuestiones.

a) Indique por qué punto pasan todas las funciones exponenciales.

.....0,1 ; 4.....

b) ¿Tienen ceros las funciones exponenciales? SI NO

En caso afirmativo indique cuáles son.....

c) Indique por qué punto pasan todas las funciones logarítmicas.

.....1 ; 0.....

d) ¿Tienen ceros las funciones logarítmicas? SI NO

En caso afirmativo indique cuáles son .....

EJERCICIO N° 11

$\log_2 10 + \log_2 10$

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

1° PARTE

Calcule $\log_2 100$ sabiendo que $\log 100 = 2$

$\log_{10} 100 = 2 = \frac{2}{0,3}$

2° PARTE

Generalice el planteo, es decir; si se conoce $\log_c b$, qué fórmula debe aplicar para calcular $\log_d b$.

Exprésela en el siguiente recuadro:

EJERCICIO N° 12

Resuelva las siguientes expresiones:

a) $5^{\log_{20} 20^{-1}} = 5$

b) $4^{\log_{16} 2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ $\quad 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{4}\ \sqrt{2}$

c) $5^{-1 \cdot \log_4 4^{-1}}$ $\quad -1 \cdot \log_4 4 = -1$ $\quad \frac{1}{5}$

d) $\log_7 5 + \log_7 8 - \log_7 40 = 0$

e) $\frac{1}{5} \log_6 32 + \log_6 18 = \log_6 32^{\frac{1}{5}} + \log_6 18 = \log_6 2 \cdot 18 = \log_6 36 = 2$

EJERCICIO N° 13

Demuestre la siguiente propiedad, realizando el desarrollo correspondiente.

$$\log_a b = \log_{a^m} b^m$$

$\log_{a^m} b^m = x$ $\qquad \log_a b = \log_{a^m} b^m$

$(a^m)^x = b^m$

$a^{mx} = b^m$

$a^x = b$

$\log_a b = x$

EJERCICIO N° 14

Recuadre el error cometido en el siguiente desarrollo, luego justifique su respuesta.

$$\frac{1}{25} > \frac{1}{125}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 > \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$2 \log \frac{1}{5} > 3 \log \frac{1}{5}$$

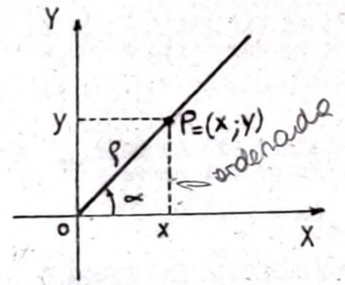
$$2 > 3$$

¿Por qué? .....

Otras funciones trascendentes

Funciones trigonométricas

Para definirlas, explicitemos la siguiente gráfica:



Supongamos que α es un ángulo cuyo lado inicial coincide con el semieje positivo de abscisas, y **P** un punto cualquiera (distinto de **O**) de su lado libre.

$\overline{OP}$ es el radio vector del punto **P**, a su medida la simbolizaremos ρ y, por definición, es siempre positivo.

Ahora bien, si efectuamos todos los cocientes posibles entre ρ y las coordenadas de **P**, obtendremos seis valores que sólo dependen de α. ¿Por qué?

Luego:

> Llamamos **funciones trigonométricas** a estos seis cocientes que tienen como variable independiente al ángulo α.
>
> Ellos son:
>
> seno de α (sen α)
> coseno de α (cos α)
> tangente de α (tg α)
> cotangente de α (cotg α)
> secante de α (sec α), y
> cosecante de α (cosec α).

Definimos tales cocientes de la siguiente manera:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{ordenada del punto P}}{\text{radio vector del punto P}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{abscisa del punto P}}{\text{radio vector del punto P}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{ordenada del punto P}}{\text{abscisa del punto P}} = \frac{y}{x} \qquad \text{con } x \neq 0$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\text{abscisa del punto P}}{\text{ordenada del punto P}} = \frac{x}{y} \qquad \text{con } y \neq 0$$

$$\text{sec}\,\alpha = \frac{\text{radio vector del punto P}}{\text{abscisa del punto P}} = \frac{\rho}{x} \qquad \text{con } x \neq 0$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{\text{radio vector del punto P}}{\text{ordenada del punto P}} = \frac{\rho}{y} \qquad \text{con } y \neq 0$$

Por otra parte:

El coseno, la cotangente y la cosecante de un ángulo son la respectivas **cofunciones** del seno, la tangente y la secante de dicho ángulo (y recíprocamente).

¿Cuál es el dominio y el conjunto imagen de cada una de las funciones trigonométricas?

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....,.....
.....

Veamos si el camino que usted recorrió para llegar a las respuestas correctas es como el siguiente.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{ordenada del punto P}}{\text{radio vector del punto P}} = \frac{y}{\rho}$$

Como ρ es siempre positivo, el cociente $\frac{y}{\rho}$ existe, cualquiera sea el ángulo α.
En consecuencia, la función seno tiene por dominio al conjunto de todos los ángulos.

Con respecto al conjunto imagen, sabemos que y puede ser positivo, negativo o nulo, según el cuadrante en el que se encuentre el punto P.
Pero, como ρ es siempre positivo (¿lo recuerda?) y hace las veces de hipotenusa en un triángulo rectángulo (cuando éste se forma) mientras que la ordenada (en valor absoluto) es cateto, se cumple.

$$|y| \leq \rho$$

O sea:

$$-\rho \leq y \leq \rho$$

Luego:

$$-1 \leq \frac{y}{\rho} \leq 1$$

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$$

Por lo tanto, el conjunto imagen de la función seno es el intervalo: [-1; 1].

Si aplicamos tal razonamiento a las demás funciones trigonométricas, resulta:

FUNCION	D O M I N I O	CONJUNTO IMAGEN
sen α	Todos los ángulos.	[-1; 1]
cos α	Todos los ángulos.	[-1; 1]
tg α	Todos los ángulos para los cuales $x \neq 0$.	$\mathbb{R}$
cotg α	Todos los ángulos para los cuales $y \neq 0$.	$\mathbb{R}$
sec α	Todos los ángulos para los cuales $x \neq 0$.	$\mathbb{R} - (-1; 1)$
cosec α	Todos los ángulos para los cuales $y \neq 0$.	$\mathbb{R} - (-1; 1)$

¿Su trabajo coincidió con la presentación que acabamos de explicitar? Si es así, ¡bravo!
Si así no fue, le sugerimos detenerse un poco más en este tema ¿De acuerdo?

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página 225).

EJERCICIO N° 15

1° PARTE

Demuestre que la recíproca de la función seno es la función cosecante.

$$\text{Sen}\alpha = \text{cosec}\,\alpha$$

$$\frac{1}{\text{sen}\alpha} = \frac{1}{\frac{y}{\rho}} = 1 \cdot \frac{\rho}{y} = \frac{\rho}{y} = \text{cosec}\,\alpha$$

$$\frac{1}{\text{sen}\alpha} = \text{cosec}\,\alpha \qquad \frac{1}{\frac{y}{\rho}} = 1 \cdot \frac{\rho}{y} = \frac{\rho}{y} =$$

2° PARTE

Indique cuál es la recíproca del coseno y cuál la recíproca de la tangente.

Recíproca del coseno

$$\cos^{-1}\alpha = \text{sec}\,\alpha$$

Recíproca de la tangente

$$\text{tg}^{-1}\alpha = \text{cotg}\,\alpha$$

EJERCICIO N° 16

Determine el signo de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes. Coloque en cada uno de los casilleros del siguiente cuadro, el signo más + cuando la función sea positiva o el signo menos - cuando resulte negativa.

FUNCION TRIGONOMETRICA	1° CUAD.	2° CUAD.	3° CUAD.	4° CUAD.
sen α y cosec α	+	+	−	−
cos α y sec α	+	−	−	+
tg α y cotg α	+	−	+	−

EJERCICIO N° 17

Demuestre la veracidad de cada una de las siguientes relaciones:

a) $\boxed{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha}$

$$\frac{\frac{Y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{Y}{\rho}\cdot\frac{\rho}{x} = \frac{Y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

b) $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ **Relación Pitagórica**

$$\left(\frac{Y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = 1 \quad \frac{Y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{Y^2+x^2}{\rho^2} \Rightarrow \rho^2 = Y^2 + x^2 \Rightarrow \frac{\rho^2}{\rho^2} = \boxed{1}$$

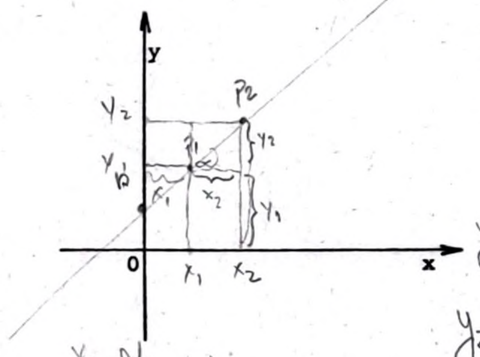
EJERCICIO N° 18

1° PARTE

Realice la gráfica de una función lineal cuya fórmula es:

$$y = mx + b \qquad (m \neq 0)$$

considerando en ambos ejes la misma unidad.



$P_2(x_2, y_2)\ y_2 = mx_2 + b$

$P_1(x_1, y_2)\ y_1 = mx_1 + b$

$y_2 - y_1 = mx_2 + b - mx_1 - b$

$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha$

2° PARTE

Luego marque dos puntos de la misma

$$P_1 = (x_1; y_1) \qquad P_2 = (x_2; y_2)$$

y el ángulo α que la recta determina con el semieje positivo de las abscisas.

3° PARTE

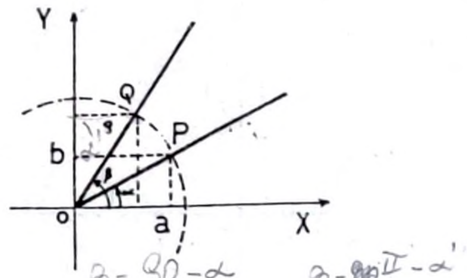
Demuestre que la pendiente de la recta graficada es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{o bien} \quad m = \operatorname{tg}\alpha$$

EJERCICIO N° 19

Sean P y Q dos puntos de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio ρ, tales que α y β resulten complementarios.

Gráficamente:



$\beta = 90 - \alpha$ $\quad \beta = 90° - \alpha'$

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\quad \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha'$

1° PARTE

Si P = (a; b) ,indique las coordenadas de Q, justifique su respuesta.

.....

¿Por qué?.....

2° PARTE

Exprese las funciones trigonométricas de α , y las de β .

3° PARTE

Formule la relación que pueda establecerse entre las funciones trigonométricas que acaba de expresar.

.....

.....

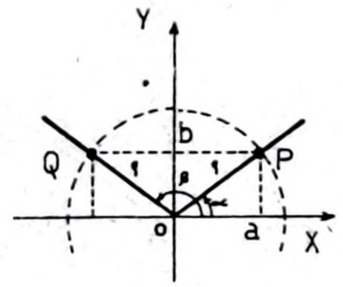
.....

.....

EJERCICIO N° 20

Sean P y Q dos puntos de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio ρ tales que α y β resulten suplementarios.

Gráficamente



1° PARTE

Si P = (a;b)

Indique las coordenadas de Q, justifique su respuesta.

.....

.....

¿Por qué?.....

2° PARTE

Exprese las funciones trigonométricas de α y β .

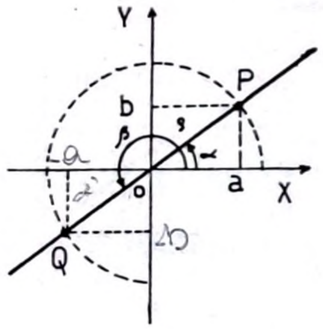
3° PARTE

Formule la relación que pueda establecerse entre las funciones trigonométricas que acaba de expresar.

EJERCICIO N° 21

Sean P y Q dos puntos de la circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio ρ tales que α y β difieren en 180°

Gráficamente:



1° PARTE

Si P = (a;b)

Indique las coordenadas de Q. Justifique su respuesta.

.....

.....

¿Por qué?.....

2° PARTE

Exprese las funciones trigonométricas de α y de β.

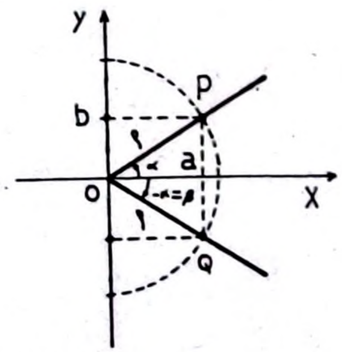
3° PARTE

Formule la relación que pueda establecerse entre las funciones trigonométricas que acaba de expresar.

EJERCICIO N° 22

Sean P y Q dos puntos de una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio ρ tales que α y β son ángulos opuestos.

Gráficamente:



1° PARTE

Si P = (a;b)

Indique las coordenadas de Q. Justifique su respuesta.

.....

.....

¿Por qué? .....

2° PARTE

Exprese las funciones trigonométricas de α y de β .

3° PARTE

Formule la relación que pueda establecerse entre las funciones que acaba de expresar.

EJERCICIO N° 23

Reduzca a su mínima expresión.

a) $3 \operatorname{sen}(-\alpha) + \cos(90° - \alpha) =$

$-3 * \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha = -2 \operatorname{sen}\alpha$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - \cos(\alpha + 3\pi)}{2 \operatorname{sen}\alpha} =$

$\dfrac{\cos\alpha + \cos\alpha}{2 \operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

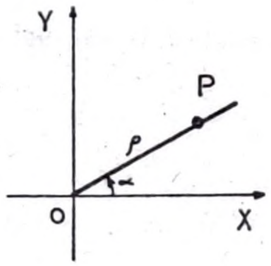
c) $\cos^2(\pi - \alpha) + \operatorname{sen}^2(-\alpha) =$

$-\cos^2\alpha * -\operatorname{sen}^2\alpha =$

Continuemos con otro aspecto de las funciones trigonométricas.

Periodicidad de las funciones trigonométricas

Con la ayuda de la siguiente gráfica, vamos a introducirnos en este tema.



Sea α un ángulo positivo tal que su lado inicial coincida con el semieje positivo de abscisas, y un punto P perteneciente a su lado libre (distinto de 0).

Cuando el lado libre efectúa un giro completo, el punto P describe una circunferencia de radio ρ.

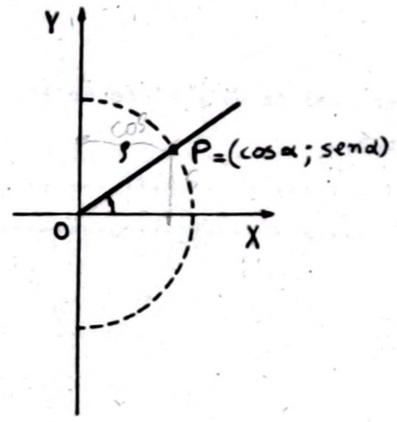
Dado que P puede ser cualquier punto del lado libre de α, elegimos $\rho = 1$. Se tiene, así, la llamada **circunferencia unitaria o circunferencia trigonométrica.**

¿Cuáles son las coordenadas de P?

.....

.....

En efecto, resulta P = (cos α; sen α)



Pero... es obvio que la ordenada de P no sólo representa al seno de α, sino también al seno de todos los ángulos coterminales con α.

Luego:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + 2 \pi k) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Análogamente para la función coseno:

$$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2 \pi k) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Llegamos al momento de la definición:

> **Las funciones que tienen la propiedad de tomar el mismo valor a intervalos iguales se llaman periódicas.**

Luego, las funciones seno, coseno y sus respectivas recíprocas: la cosecante y la secante, son periódicas de período 2π.

Usted... ¿puede decir cuál es el período de las funciones tangente y cotangente?

.....

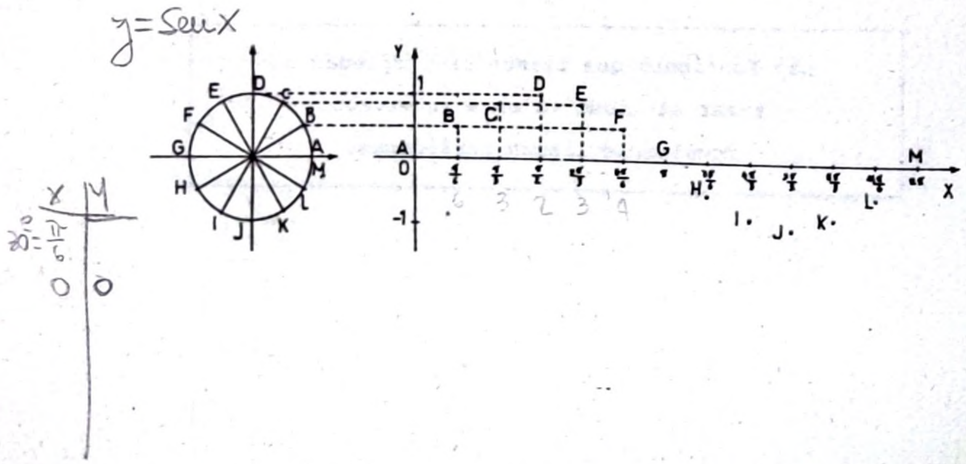
.....

Así es: π

¿Cómo se puede representar la función seno?

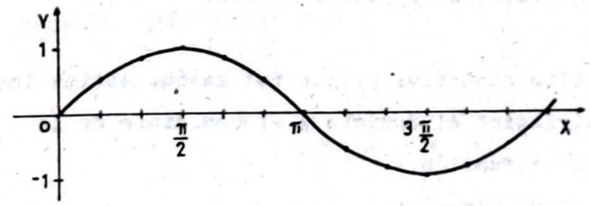
Dado que la ordenada de un punto de la circunferencia trigonométrica representa el seno del ángulo central correspondiente, para graficar la función seno podemos proceder de la siguiente manera:

Trazamos la circunferencia unitaria y un par de ejes cartesianos ortogonales.
En la circunferencia unitaria consideramos algunos ángulos centrales α, expresados en radianes o en grados.
El eje de abscisas del sistema se gradúa con la misma unidad de medida que α, como si la circunferencia se "desenrrollase" sobre el eje horizontal.



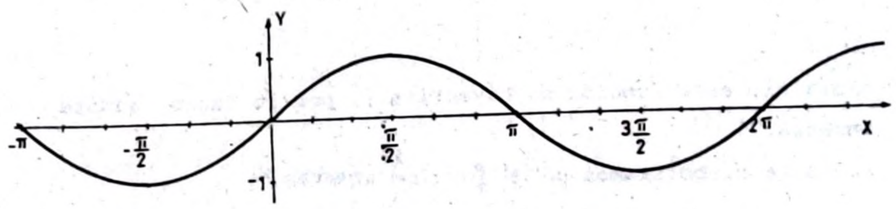
¿Qué se obtiene?

Veamos:



Se ha logrado así un **ciclo completo** de una curva que se denomina **sinusoide**, que corresponde a la variación de α de 0 a 2π, o bien de 0° a 360°.

También, por la periodicidad de la función seno podemos extender la gráfica, repitiendo el ciclo uno a continuación del otro, a lo largo del eje de abscisas.
¿Lo vemos?



Con los elementos que hemos visto ¿puede usted expresar si la función seno es biyectiva? Fundamente su respuesta.

.....

.....

.....

Evidentemente, no lo es, pues por la periodicidad de esta función hay infinitos ángulos con el mismo seno; por lo tanto, no se cumple la inyectividad y luego no es biyectiva.

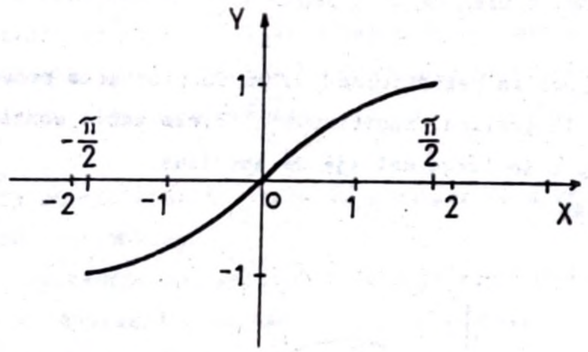
¿Hay formas de hacerla biyectiva? ¿Cómo?

Para que resulte biyectiva y, por tal razón, admita inversa podemos "restringir" el dominio y el codominio de la definición de la función.
Ilustremos con un ejemplo:

Sea:

$$g: [-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1; 1] \quad / \quad g(\alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

La gráfica correspondiente es:



Ahora sí: esta función es biyectiva y, por lo tanto, admite inversa.
¿Cómo la simbolizamos a tal función inversa?

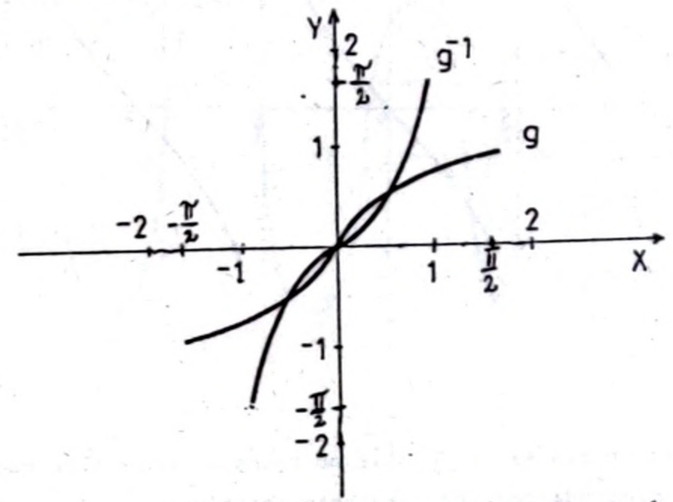
arc sen α

y se lee: arco seno de α.

Luego, existe:

$$g^{-1}: [-1; 1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}] \quad / \quad g^{-1}(\alpha) = \text{arc. sen } \alpha$$

Observemos las gráficas de g y g^{-1}.

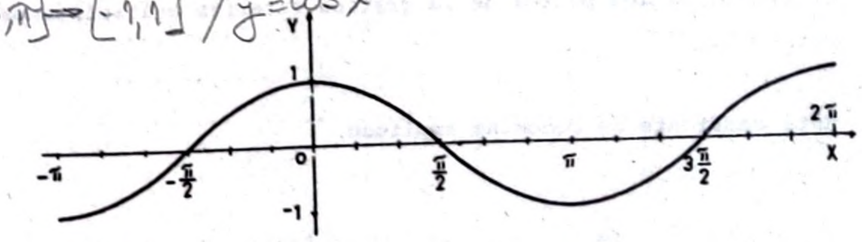


Bien, usted habrá deducido que para graficar las demás funciones trigonométricas, puede procederse en forma análoga.
¿Verdad?

Así, para la función coseno se tiene la cosinusoide:

$f = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = \cos x$ $\quad f^{-1} = [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] / y = \arccos x$

$f = [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] \,/\, y = \cos x$

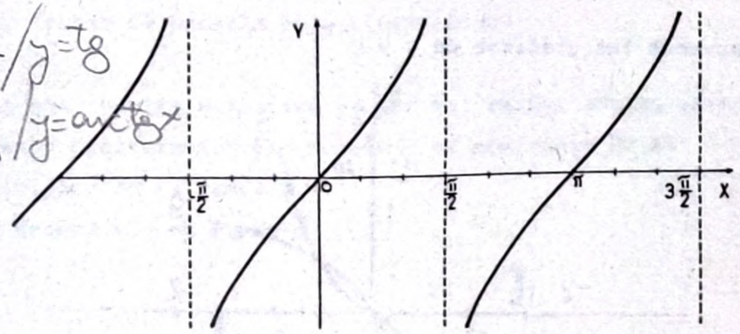


Para la función tangente, está la tangentoide, etc.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = tg(x)$

$f: [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} \;/\; y = tg$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \;/\; y = arctg\, x$



¿Qué ocurriría si la fórmula no fuese y = sen x sino que se viera afectada por una constante positiva?

Por ejemplo:

$$y = 2 \operatorname{sen} x$$

o en general:

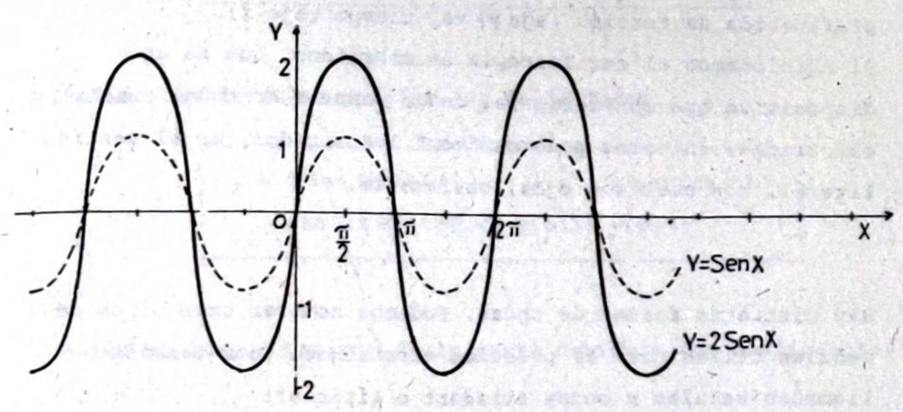
$$y = k \operatorname{sen} x \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

Pues bien, se obtendría una curva de tipo sinusoidal que solamente diferiría de la ya trazada, en que todas las ordenadas de los puntos de la gráfica estarían multiplicados por k = 2.

Esta constante se denomina **amplitud.**

¿Cómo sería la gráfica correspondiente?

Veamos:



Seguramente usted quiere conocer algunas aplicaciones de la función seno ¿Es así?

Comencemos con una preguntita paradójica:

¿Pueden verse los sonidos? Explique por qué:

.....

.....

.....

.....

Con certeza, usted habrá contestado que los sonidos no pueden ser vistos porque son vibraciones del aire.

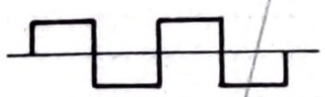
Y ¿sabe qué es un osciloscopio?

Es un instrumento electrónico de medidas que permite visualizar las señales eléctricas, ya que en su pantalla muestra una graficación de tensión (eje y) vs. tiempo (eje x).
Si adicionamos al osciloscopio un micrófono, que es un dispositivo que convierte las ondas sonoras en ondas o señales eléctricas, entonces podemos "ver" los sonidos, en el sentido literal, con nuestros ojos, obviamente.

Hay distintas formas de ondas. Podemos nombrar tres tipos de señales útiles para la práctica electrónica (son también llamadas señales u ondas standart o típicas):

onda senoidal

onda diente de sierra



onda rectángulo

El cambio en el volumen de un sonido puede ser visto en un osciloscopio como una diferencia en la altura de las ondas.

Sabemos que se llama amplitud a tal altura de onda.

Lo visto para la función seno, es aplicable análogamente, a la función coseno. La fórmula correspondiente es:

$y = k \cos \alpha$ $\quad k \in \mathbb{R}^+$, es la amplitud

También las fórmulas podrían ser de la forma:

$y = k \operatorname{sen}(ax + b)$ $\quad y = k \cos(ax + b)$
con $k \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$

Veamos el comportamiento de la curva debido a los coeficientes a y b.

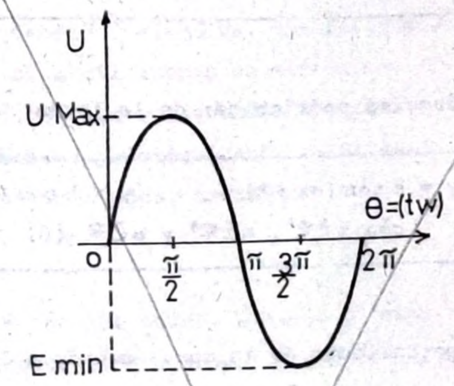
a produce un "acortamiento" o "estiramiento" del ciclo, pues puede demostrarse fácilmente, que afecta al período de la función.

b produce un "desplazamiento" igual a $\frac{b}{a}$ de la gráfica, hacia la derecha o hacia la izquierda.

No desarrollaremos este tema. Sólo lo presentamos y mostramos otra aplicación de la función seno, a la que podrán sacar más provecho aquellos lectores que hayan cursado su ciclo medio en escuelas técnicas (o industriales).

Tal aplicación es la representación de la tensión alterna.

Observemos la figura:



Ella nos muestra la representación gráfica de la tensión alterna.

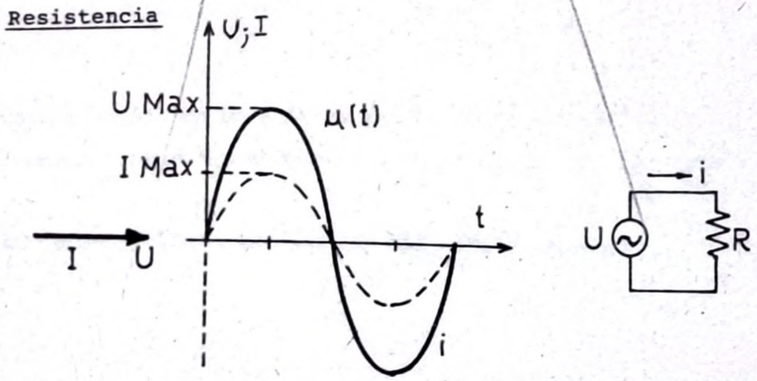
$$\mu = U_{MAX} \text{ sen } (wt)$$

Recordemos ahora qué sucede con la corriente cuando aplicamos dicha tensión a las siguientes cargas:

a) resistencia
b) inductancia
c) capacitancia

Comencemos con la primera:

a) Resistencia

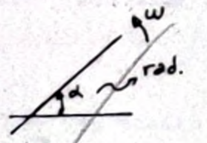


Vemos que la tensión y la corriente -en la figura- están en fase.

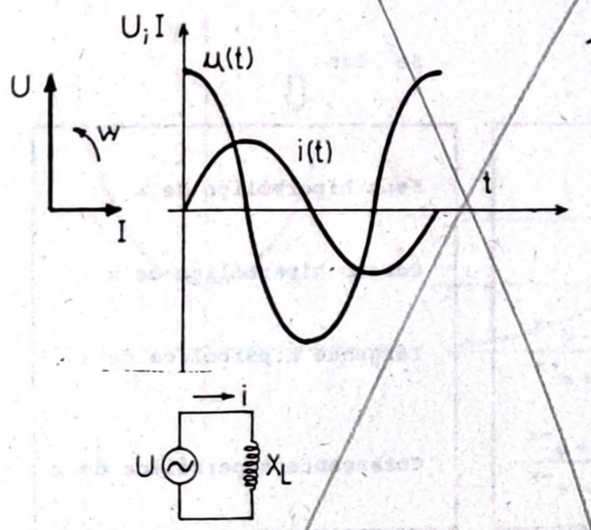
$$U = I\,R \Rightarrow I = \frac{U}{R}$$

Corriente $i = I_{MAX} \text{ sen } wt$

Tensión $\mu = U_{MAX} \text{ sen } \frac{wt}{x}$



b) Inductancia

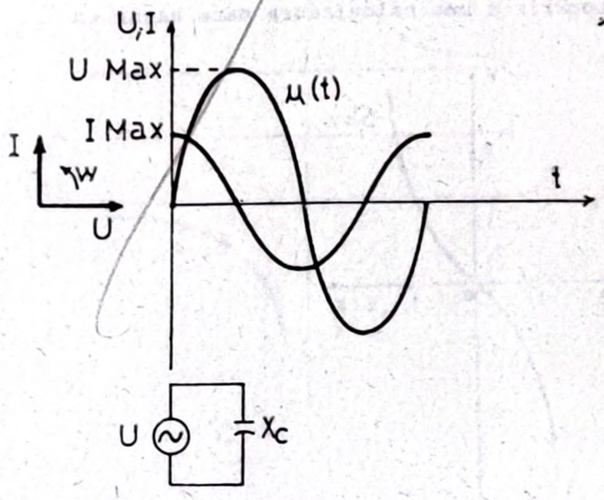


$$\mu = U_{MAX} \text{ sen } (wt + \frac{\pi}{2})$$

$$i = I_{MAX} \text{ sen } (wt)$$

La corriente resultante atrasa 90° respecto de la tensión aplicada.

c) Capacitancia



$$\mu = U_{MAX} \text{ sen } (wt)$$

$$i = I_{MAX} \text{ sen } (wt + \frac{\pi}{2})$$

En este caso, la corriente resultante adelanta 90° respecto de la tensión.

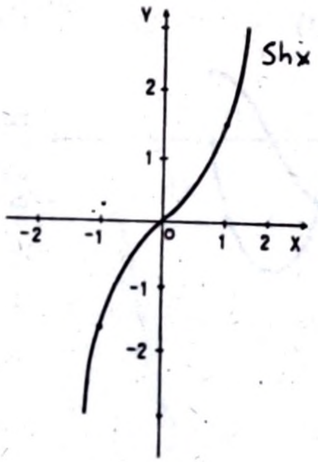
¿Le interesó conocer ciertas aplicaciones de la función seno?
Ahora, sólo nos queda analizar otro tipo de funciones.

Funciones hiperbólicas

Vamos a verlas a partir de las funciones exponenciales.

Sus fórmulas son ⇩	Se leen ⇩
$Sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	Seno hiperbólico de x
$Ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	Coseno hiperbólico de x
$Th\,x = \frac{Sh\,x}{Ch\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	Tangente hiperbólica de x
$Cth\,x = \frac{Ch\,x}{Sh\,x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	Cotangente hiperbólica de x

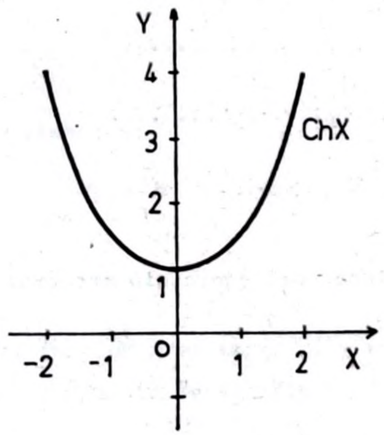
¿Cómo hacemos para representarla gráficamente?
En este caso vamos a recurrir a una calculadora para hacer un cuadro de valores.
Así resulta:

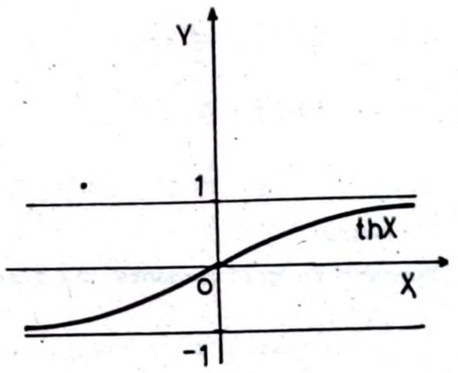


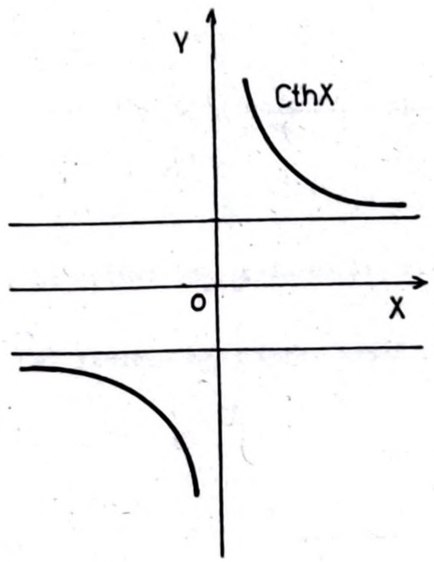
Observe la simetría de la curva con respecto al origen de coordenadas.

¿Puede anticipar usted cómo haría para representar las restantes funciones hiperbólicas?
¡Cierto! En forma análoga a la vista para Sh x, se pueden hacer las gráficas de las otras funciones hiperbólicas.

De esta manera, resultarían:







EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página 232).

EJERCICIO N° 24

1° PARTE

Escriba sobre la línea de puntos la amplitud de cada una de las funciones cuyas fórmulas son:

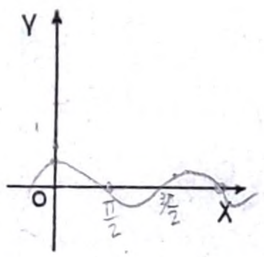
a) $y = \frac{1}{3} \operatorname{sen} x$ .....[-1/3, 1/3].....

b) $y = 3 \cos x$ .....[-3, 3].....

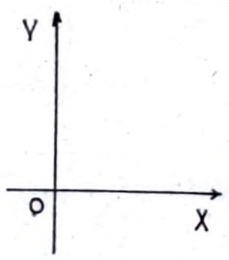
2° PARTE

Represente gráficamente las funciones del ejercicio anterior.

a)



b)



EJERCICIO N° 25

Dadas las siguientes definiciones:

a) Una función f es par si y sólo si para todo elemento de su dominio se verifica:

$$f(x) = f(-x)$$

En símbolos:

$f: A \to B$ es par $\Leftrightarrow \forall x \in A: f(x) = f(-x)$

b) Una función f es impar si y sólo si para todo elemento de su dominio se verifica:

$$f(x) = -f(-x)$$

En símbolos:

$f: A \to B$ es impar $\Leftrightarrow \forall x \in A: f(x) = -f(-x)$

Le pedimos que realice las siguientes actividades:

a) Indique par o impar según resulten las siguientes funciones:

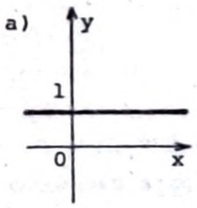
Ch x ...par..... y Sh x ...impar...

b) Justifique la respuesta dada para Sh x.

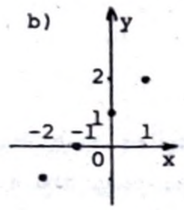
_ _ _ _

EJERCICIO N° 2

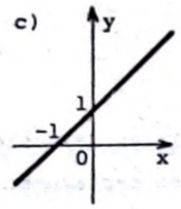
Marque una cruz en el recuadro de las gráficas que correspondan a la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / f(x) = x+1

a) 

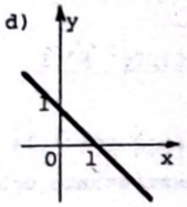
[ ]

b) 

[ ]

c) 

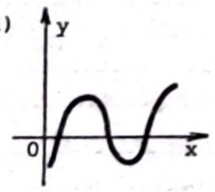
[X]

d) 

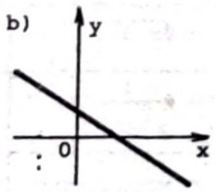
[ ]

EJERCICIO N° 3

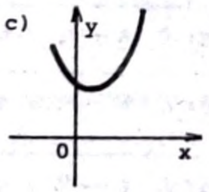
Escriba cuadrática o lineal según corresponda debajo de cada una de las siguientes gráficas.

a) 

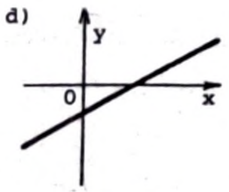
[—]

b) 

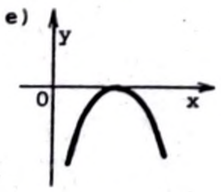
[LIN]

c) 

[CUA]

d) 

[LIN]

e) 

[CUA]

EJERCICIO N° 4

Dada la parábola de ecuación: $y = (x+4)^2 - 9$

Escriba "verdadera" en cada una de las siguientes afirmaciones que así resulten.

a) La parábola no intersecta al eje de ordenadas... [F]

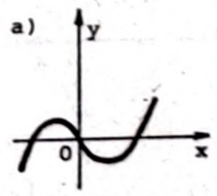
b) La parábola intersecta al eje de abscisas..... [V]

c) La parábola tiene vértice en el punto (-4;-9)... [V]

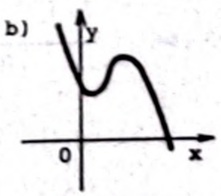
d) La parábola es cóncava hacia las ordenadas positivas..... [V]

EJERCICIO N° 5

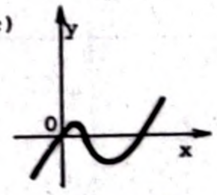
Marque una cruz debajo de las gráficas que puedan corresponder a una función de tercer grado, con dos o más raíces positivas.

a) 

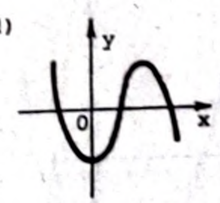
[—]

b) 

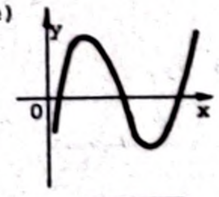
[—]

c) 

[X]

d) 

[X]

e) 

[X]

EJERCICIO N° 6

Represente gráficamente cada una de las siguientes funciones:

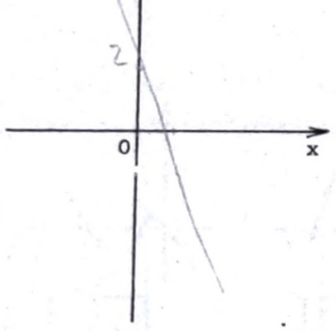
a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f_1(x) = -3x + 2$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f_2(x) = x^2 - 6x + 5$

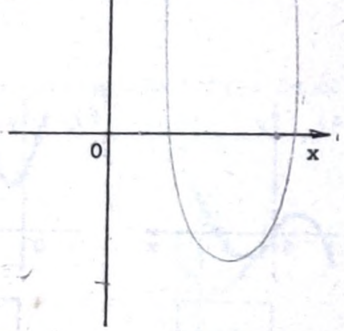
c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f_3(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x \in (-\infty; 1) \\ x & \text{si } x \in [1; \infty) \end{cases}$

d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

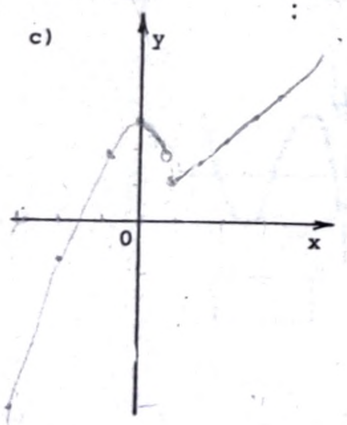
a)



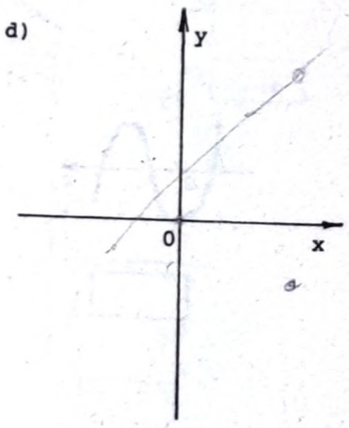
b)



c)



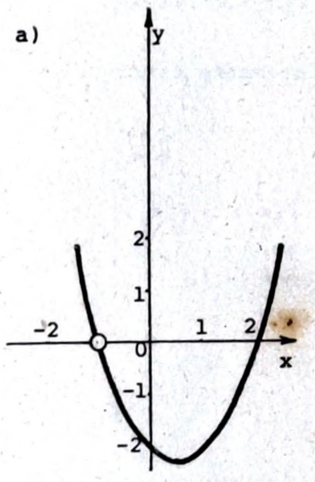
d)



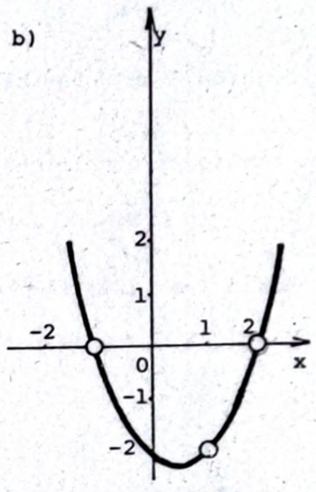
EJERCICIO N° 7

Marque una cruz debajo de la gráfica que represente a la función g. Sea $g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = \dfrac{(x+1)\cdot(x-2)\ (x-1)}{x-1}$

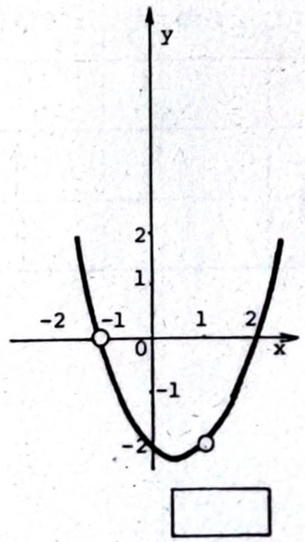
a)



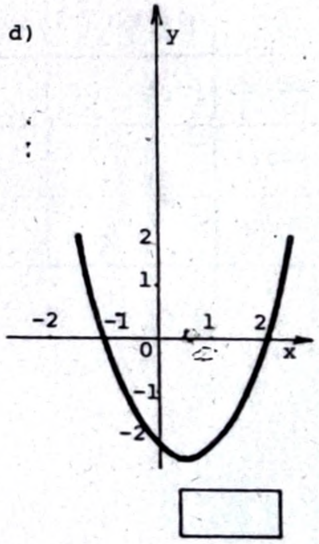
b)



c)



d)



EJERCICIO N° 8

Lea atentamente este texto:

Si f es una función tal que para dos elementos cualesquiera x_1 y x_2 del dominio se verifica

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

esta función f se denomina **estrictamente creciente.**

Si en cambio se cumple que:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

la función f es **estrictamente decreciente.**

Ahora...

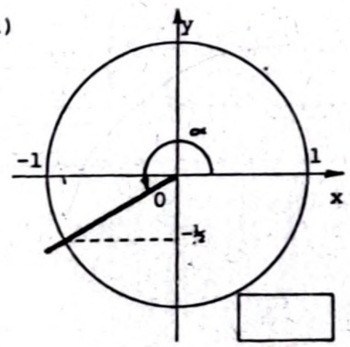
Complete el siguiente cuadro con el signo ↑ cuando la función resulte estrictamente creciente y con el signo ↓ cuando se trate de una función estrictamente decreciente.

		$\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$	$\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$	$\alpha \in (\pi; 3\frac{\pi}{2})$	$\alpha \in (3\frac{\pi}{2}; 2\pi)$
a)	sen α	↑	↓	↓	↑
b)	cos α	↓	↓	↑	↑
c)	tg α	↑	↑	↑	↑

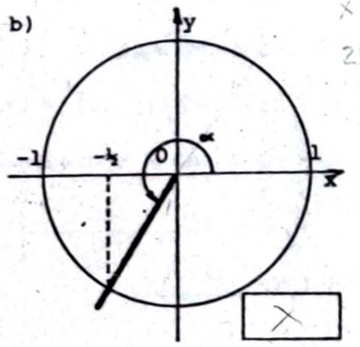
EJERCICIO N° 9

Señale con una cruz la gráfica que represente $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

a)

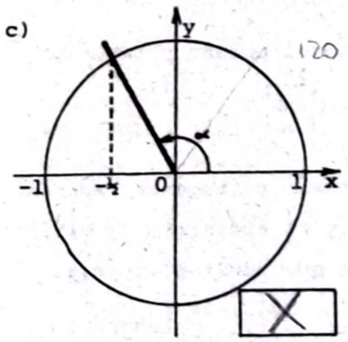


b)

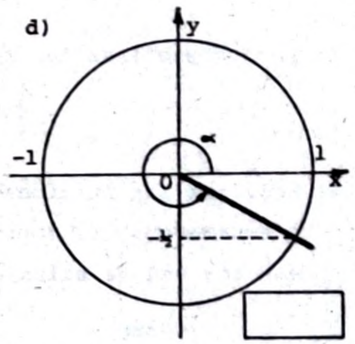


X

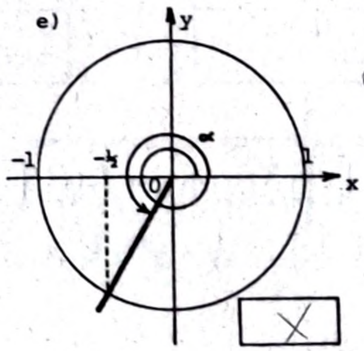
c)



d)



e)



X

EJERCICIO N° 10

Escriba verdadera en las afirmaciones que así resulten, cualquiera sea el ángulo α

a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2(-\alpha) = 1$ V

b) $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ V

c) $\operatorname{sen}^2(-\alpha) + \cos^2\alpha = 1$ V

d) $-2 < \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha < 2$ V

EJERCICIO N° 11

Resuelva las siguientes cuestiones.

a) ¿Son biyectivas las funciones coseno y tangente?

SI NO

b) Redefina las funciones coseno y tangente restringiendo adecuadamente el dominio y el codominio de definición de cada una de ellas para que admitan inversas.

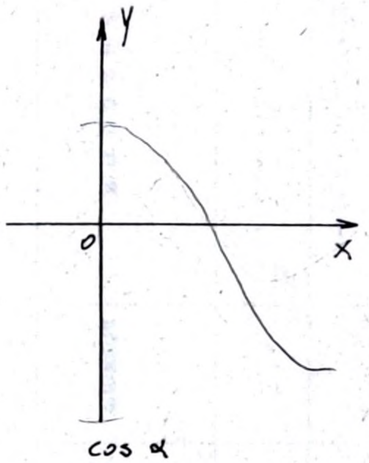
coseno	tangente
Dominio: $(0,\pi)$	Dominio: $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
Codominio: $(-1,1)$	Codominio: $\mathbb{R}$

c) Exprese estas nuevas funciones y sus respectivas inversas.

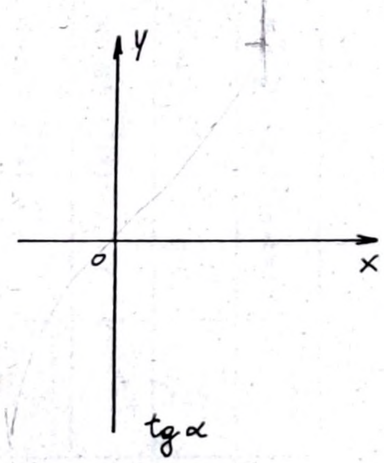
f: $[0,\pi] \to [-1,1] / f(x) = \cos x$ $\quad f^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi] / f^{-1}(x) = \arccos x$

g: $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} / f(x) = \operatorname{tg} x$ $\quad g^{-1}: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) / f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

d) Represente gráficamente las funciones que acaba de expresar.

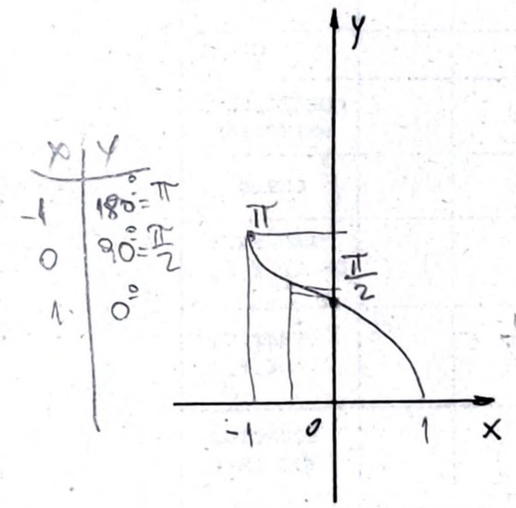


cos α

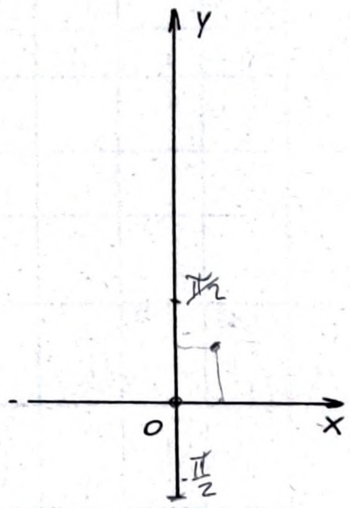


tg α

x	y
-1	180° = π
0	90° = π/2
1	0°



Inversa: arc cos α



Inversa: arc tg α

x	y
0	0
1	π/4
2	

EJERCICIO N° 12

1ª Parte:

Complete según corresponda cada una de las columnas del siguiente cuadro.

	2)	b)	c)	d)	e)	f)
FUNCION	$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}' / f_1(x) = 5x-7$	$f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_2(x) = x^2+2x-8$	$f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_3(x) = 7$	$f_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_4(x) = x^3 + 1$	$f_5: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ / f_5(x) = (\frac{1}{2})^x$	$f_6: [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} / f_6(x) = \text{sen } x$
FORMULA	$5x-7$	x^2+2x-8		x^3+1	$(\frac{1}{2})^x$	$\text{sen } x$
CONJUNTO IMAGEN	$\mathbb{R}$	$[-9; +\infty)$	$\{7\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$[-1; 1]$
IMAGEN DE x=-2	-17	-8	7	-7	4	-1
GRADO	1	2	0	3	-1	-1
COEFICIENTE PRINCIPAL	5	1		1	1	-1
CEROS	$\frac{7}{5}$	$2; -4$		-1		0
PENDIENTE DE f_1 Y f_3	$+$		0	$+$	$-$	$+$
VERTICE DE f_2		$(-1; -9)$				
ECUACION EJE DE f_2		$x=-1$				
FUNCION INVERSA	$y = \frac{x+7}{5}$			$y = \sqrt[3]{x-1}$	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	$y = \text{arc sen } x$

2° PARTE

Exprese las coordenadas al origen de f_1.

- - - - - - - - - - -

RESPUESTAS DE LA EJERCITACION DE UNIDAD III: FUNCION

EJERCICIO N° 1 (Pág.148)

a) SI ~~NO~~

Cumple con la definición de función.

b) ~~SI~~ NO

No cumple con la condición de existencia.

c) ~~SI~~ NO

No cumple con la condición de unicidad.

EJERCICIO N° 2 (Pág.149)

1° PARTE

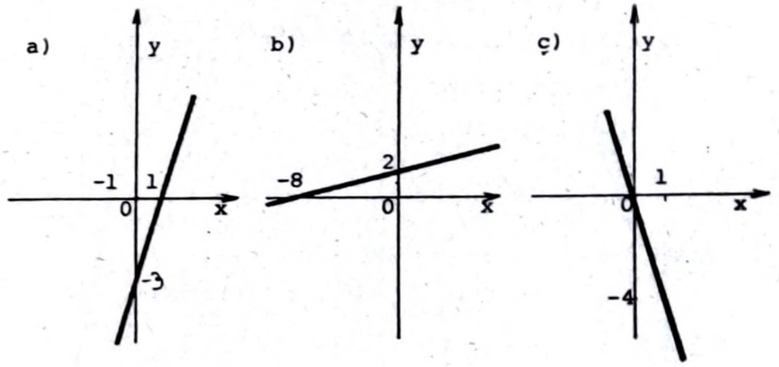
	FUNCION	DOMINIO	CODOMINIO	f(3)	CEROS
a)		$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}_0$	12	~~0~~ ← NO VA
b)		$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	0	3
c)		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	11	$-\frac{5}{2}$

2° PARTE

	FUNCION	ABSCISA AL ORÍGEN	ORDENADA AL ORIGEN	PENDIENTE
a)		1	-3	3
b)		-8	2	$\frac{1}{4}$
c)		0	0	-4

3° PARTE

a) b) c)



4° PARTE

a) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $y = \frac{1}{3}x + 1$

b) $g^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $y = 4x - 8$

c) $h^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $y = -\frac{1}{4}x$

EJERCICIO N° 3 (Pág.150)

a) [ ] b) [ ] c) [ ] d) [x] e) [x]

EJERCICIO N° 4 (Pág.150)

1) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = \frac{4}{3}x$

2) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $h(x) = \frac{4}{3}x + k$ con $k \in \mathbb{R}$

EJERCICIO N° 5 (Pág.151)

1° PARTE

a) Sobreyectiva
b) —— (no es función)
c) Inyectiva
d) Biyectiva

2° PARTE

Sólo f_4 por ser biyectiva

EJERCICIO N° 6 (Pág.152)

a) g o f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $(g \circ f)(x) = -2x + 5$

b) f o g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $(f \circ g)(x) = -2x - 4$

c) $(g \circ f)(3) = -1$

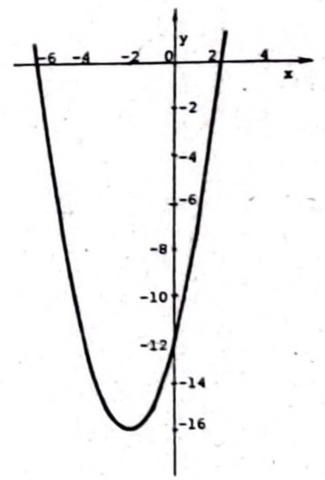
d) -2

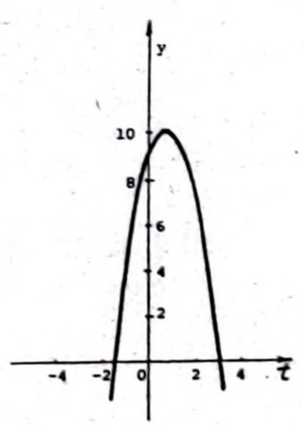
EJERCICIO N° 7 (Pág.159)

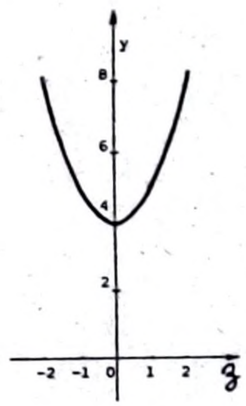
1° PARTE

	FUNCION	CONCAV. ∪ o ∩	CEROS	ECUAC. EJE	VERTICE	CONJUNTO IMAGEN	INTERS. c/ EJES
a)		∪	2 y -6	x = -2	(-2;-16)	[-16;+∞)	(0;-12)
b)		∩	$-\frac{3}{2}$ y 3	$\frac{+}{}= \frac{3}{4}$	$(\frac{3}{4}; \frac{81}{8})$	$(-\infty; \frac{81}{8}]$	(0;9)
c)		∪	——	$\exists = 0$	(0; 4)	[4; +∞)	(0;4)

2° PARTE







3° PARTE

[~~SI~~] [NO]

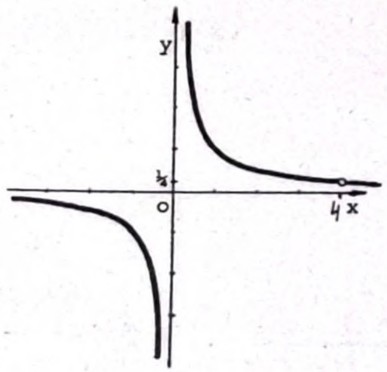
Pues no son biyectivas

EJERCICIO N° 8 (Pág. 160)

a) [—] b) [b] c) [—] d) [d] e) [e]

EJERCICIO N° 9 (Pág. 164)

1° PARTE



2° PARTE

[—]

3° PARTE

$\mathbb{R} - \{0, \frac{1}{4}\}$ o $\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ y } x \neq \frac{1}{4} \}$

EJERCICIO N° 10 (Pág. 174)

a) P = (0; 1)

b) [~~SI~~] [NO]

c) Q = (1; 0)

d) [SI] [~~NO~~]

Es el número uno

EJERCICIO N° 11 (Pág. 175)

1° PARTE

$\log_2 100 = y \quad \Rightarrow \quad 2^y = 100$

$y \log 2 = \log 100$

$\log_2 100 . \log 2 = \log 100$

$$\boxed{\log_2 100 = \frac{\log 100}{\log 2}}$$

o bien

$$\boxed{\log_2 100 = \frac{2}{\log 2}}$$

2° PARTE

Así $\log_d b = y \Rightarrow d^y = b$

$\log_c b = x \Rightarrow c^x = b$

Luego: $d^y = c^x$

$y \log_c d = x \log_c c$

$\log_d b . \log_c d = \log_c b$

$$\boxed{\log_d b = \frac{\log_c b}{\log_c d}}$$

Este tema se conoce con el nombre de **cambio de base.**

EJERCICIO N° 12 (Pág. 175)

a) $5^1 = 5$

b) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

c) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

d) $\log_7 \frac{5.8}{40} = \log_7 1 = 0$

e) $\log_6 (\sqrt[5]{32}.18) = \log_6 36 = 2$

EJERCICIO N° 13 (Pág. 176)

$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \Rightarrow (a^x)^m = b^m \Rightarrow (a^m)^x = b^m$ ①

Además:

$\log_{a^m} b^m = y \Rightarrow (a^m)^y = b^m$ ②

de ① y ② resulta : $(a^m)^x = (a^m)^y \Rightarrow x = y$

$$\log_a b = \log_{a^m} b^m$$

EJERCICIO N° 14 (Pág. 176)

$$2 \log \frac{1}{5} > 3 \log \frac{1}{5}$$

El error está en aplicar logaritmo a ambos miembros sin cambiar el sentido de la desigualdad, pues $\log \frac{1}{5} < 0$.

EJERCICIO N° 15 (Pág. 181)

1° PARTE

$$\frac{1}{\text{sen}\alpha} = \frac{1}{\frac{\text{ordenada del punto P}}{\text{radio vector del punto P}}}$$

$$\frac{1}{\text{sen}\alpha} = \frac{\text{radio vector del punto P}}{\text{ordenada del punto P}}$$

$$\frac{1}{\text{sen}\alpha} = \text{cosec}\,\alpha$$

2° PARTE

recíproca del coseno — **secante**

recíproca de la tangente — **cotangente**

EJERCICIO N° 16 (Pág. 182)

FUNCION TRIGONOMETRICA	1° CUADR.	2° CUADR.	3° CUADR.	4° CUADR.
sen α y cosec α	+	+	-	-
cos α y sec α	+	-	-	+
tg α y cotg α	+	-	+	-

EJERCICIO N° 17 (Pág. 182)

a) $\dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}}$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}$$

$$\boxed{\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha}$$

b) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \dfrac{y^2}{\rho^2} + \dfrac{x^2}{\rho^2}$

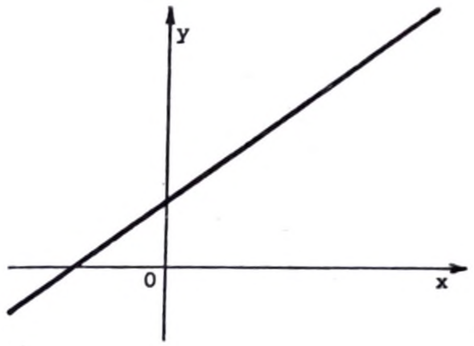
$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{y^2 + x^2}{\rho^2}$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{\rho^2}{\rho^2}$$ Por teorema de Pitágoras

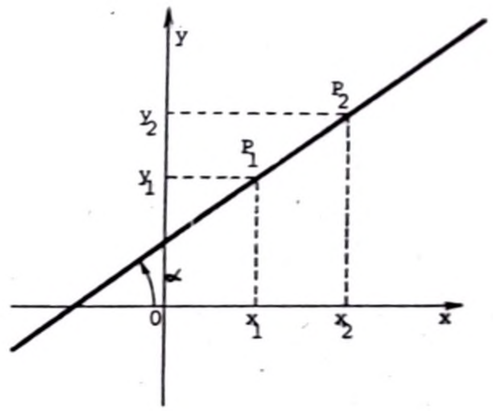
$$\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

EJERCICIO N° 18 (Pág. 183)

1° PARTE



2° PARTE



3° PARTE

P_2 pertenece a la recta $\Rightarrow y_2 = m x_2 + b$

P_1 pertenece a la recta $\Rightarrow y_1 = m x_1 + b$

restando m.a.m.: $y_2 - y_1 = m x_2 - m x_1$

$$y_2 - y_1 = m (x_2 - x_1)$$

$$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m}$$

o bien:

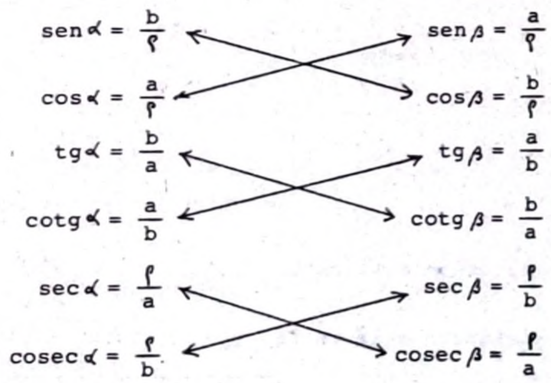
$$\boxed{\text{tg} \alpha = m}$$

EJERCICIO N° 19 (Pág. 184)

1° PARTE

Q = (b; a) por correspondencia entre los lados homólogos de los triángulos rectángulos congruentes, que resultan al proyectar P y Q sobre el eje de abscisas.

2° PARTE



3° PARTE

Las funciones trigonométricas de un ángulo son respectivamente iguales a las cofunciones de su complemento.

EJERCICIO N° 20 (Pág. 185)

1° PARTE

Q = (-a; b) por correspondencia entre lados homólogos de dos triángulos rectángulos congruentes que se obtienen al proyectar P y Q sobre el eje de abscisas.

2° PARTE

$\text{sen}\ \alpha = \frac{b}{\rho} \longleftrightarrow \text{sen}\ \beta = \frac{b}{\rho}$

$\cos\ \alpha = \frac{a}{\rho} \longleftrightarrow \cos\ \beta = -\frac{a}{\rho}$

$\text{tg}\ \alpha = \frac{b}{a} \longleftrightarrow \text{tg}\ \beta = -\frac{b}{a}$

$\text{cotg}\ \alpha = \frac{a}{b} \longleftrightarrow \text{cotg}\ \beta = -\frac{a}{b}$

$\sec\ \alpha = \frac{\rho}{a} \longleftrightarrow \sec\ \beta = -\frac{\rho}{a}$

$\text{cosec}\ \alpha = \frac{\rho}{b} \longleftrightarrow \text{cosec}\ \beta = \frac{\rho}{b}$

3° PARTE

Las funciones trigonométricas de ángulos suplementarios son iguales en valor absoluto pero con signo contrario, excepto el seno y su recíproca, la cosecante.

EJERCICIO N° 21 (Pág. 186)

1° PARTE

Q = (-a; -b) por correspondencia entre lados homólogos de dos triángulos rectángulos congruentes que se obtienen al proyectar P y Q sobre el eje de abscisas.

2° PARTE

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{\rho} \longleftrightarrow \text{sen } \beta = -\frac{b}{\rho}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\rho} \longleftrightarrow \cos \beta = -\frac{a}{\rho}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{a} \longleftrightarrow \text{tg } \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{a}{b} \longleftrightarrow \text{cotg } \beta = \frac{a}{b}$$

$$\sec \alpha = \frac{\rho}{a} \longleftrightarrow \sec \beta = -\frac{\rho}{a}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\rho}{b} \longleftrightarrow \text{cosec } \beta = -\frac{\rho}{b}$$

3° PARTE

Las funciones trigonométricas de dos ángulos que difieren en 180° son respectivamente iguales en valor absoluto, pero con signo contrario excepto la tangente y su recíproca, la cotangente.

EJERCICIO N° 22 (Pág. 187)

1° PARTE

Q = (a; -b) por correspondencia entre los lados homólogos de los triángulos rectángulos congruentes que resultan al proyectar P y Q sobre el eje de las abscisas.

2° PARTE

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{\rho} \longleftrightarrow \text{sen } \beta = -\frac{b}{\rho}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\rho} \longleftrightarrow \cos \beta = \frac{a}{\rho}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{a} \longleftrightarrow \text{tg } \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{a}{b} \longleftrightarrow \text{cotg } \beta = -\frac{a}{b}$$

$$\sec \alpha = \frac{\rho}{a} \longleftrightarrow \sec \beta = \frac{\rho}{a}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\rho}{b} \longleftrightarrow \text{cosec } \beta = -\frac{\rho}{b}$$

3° PARTE

Las funciones trigonométricas de dos ángulos opuestos son respectivamente iguales en valor absoluto pero con signo contrario, excepto el coseno y su recíproca, la secante.

EJERCICIO N° 23 (Pág. 189)

a) $-2 \operatorname{sen} \alpha$

b) $\operatorname{cotg} \alpha$

c) 1

EJERCICIO N° 24 (Pág. 204)

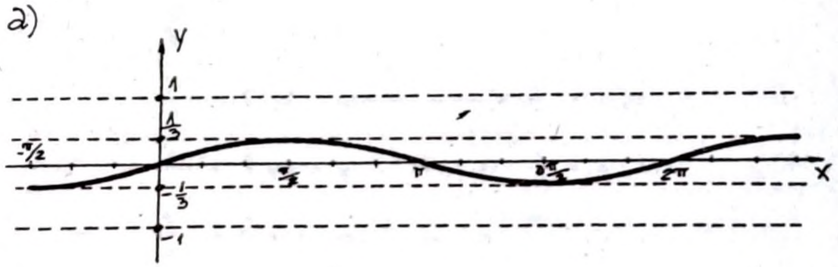
1° PARTE

a) $k = \frac{1}{3}$

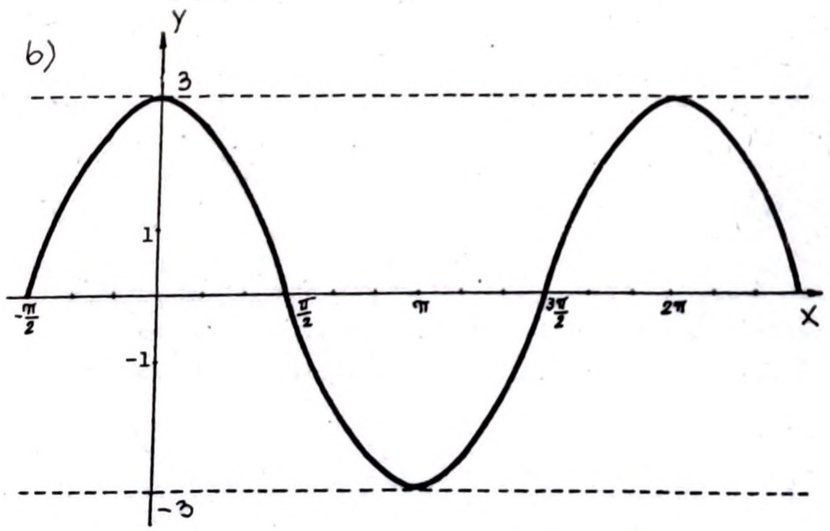
b) $k = 3$

2° PARTE

a)



b)



EJERCICIO N° 25 (Pág. 205)

a) Ch x es par y Sh x es impar.

b) Sh x es impar pues por definición tendría que cumplirse:

$$\operatorname{Sh} x = -\operatorname{Sh}(-x)$$

O sea:

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2}$$

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}$$

Resultando la identidad:

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \equiv \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

c) Función seno es impar.
Función coseno es par.
Función tangente es impar.

d) Justificación para función coseno:

Por definición debe cumplirse:

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

lo cual es cierto, por las relaciones entre las funciones de ángulos opuestos.

e) Las gráficas de las funciones pares son simétricas con respecto al **eje de ordenadas** y las de las funciones impares son simétricas con respecto al **origen de coordenadas.**

f) NO , hay funciones que no son pares y tampoco impares.

Ejemplo:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = 2x + 3$$

No se cumple:

1) $f(x) = f(-x)$

2) $f(x) = -f(-x)$

RESPUESTAS DEL TRABAJO PRACTICO DE UNIDAD III: FUNCION

EJERCICIO N° 1 (pag 207)

a) $A = \{\ \}$

b) $A = \{\ \}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 3\}$

d) $A = \{-3, 3\}$

e) $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \measuredangle -\frac{1}{2} \ \vee \ x=0\}$

EJERCICIO N° 2 (pag 208)

a)	b)	c)	d)
		x	

EJERCICIO N° 3 (pag 208)

a)	b)	c)	d)	e)
	lineal	cuadrática	lineal	cuadrática

EJERCICIO N° 4 (pag 209)

a)

b) VERDADERA

C) VERDADERA

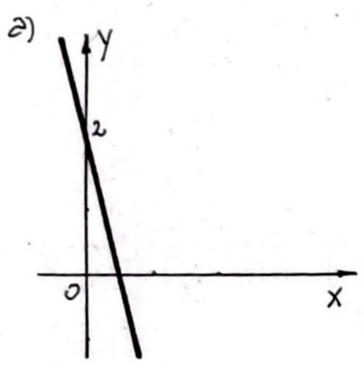
d) VERDADERA

EJERCICIO N° 5 (pag 209)

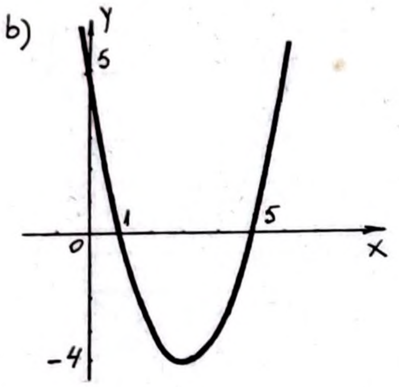
a)	b)	c)	d)	e)
		x	x	x

EJERCICIO N° 6 (pag 210)

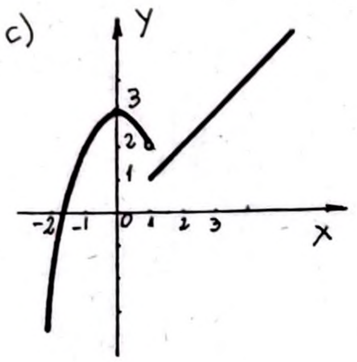
a)



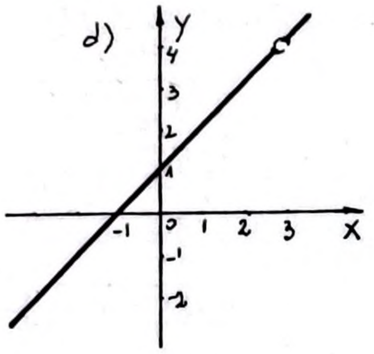
b)



c)



d)



EJERCICIO N° 7 (pag 211)

Ninguna de las gráficas representa a dicha función.

a) [—] b) [ ] c) [—] d) [—]

EJERCICIO N° 8 (pag 212)

a)		↑	↓	↓	↑
b)		↓	↓	↑	↑
c)		↑	↑	↑	↑

EJERCICIO N° 9 (pag 213)

a) [ ] b) [x] c) [x] d) [ ] e) [x]

EJERCICIO N° 10 (pag 214)

a) VERDADERA

b) VERDADERA

c) VERDADERA

d) VERDADERA

EJERCICIO N° 11 (pag 214)

a) [~~SI~~] [NO]

b) Ejemplos

coseno	tangente
Dominio: $[0;\pi]$ Codominio: $[-1;1]$	Dominio: $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ Codominio: $\mathbb{R}$

Atención: pueden dar otras respuestas correctas.

c) $f: [0;\pi] \longrightarrow [-1;1]$ / $f(\alpha) = \cos \alpha$

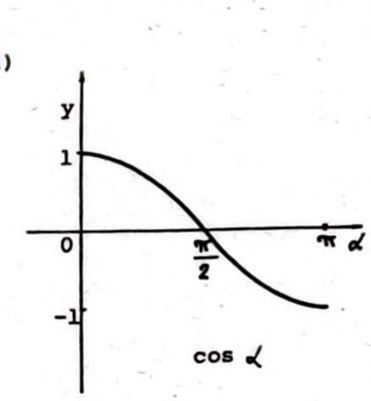
$g: (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ / $g(\alpha) = tg\ \alpha$

Las respectivas funciones inversas son:

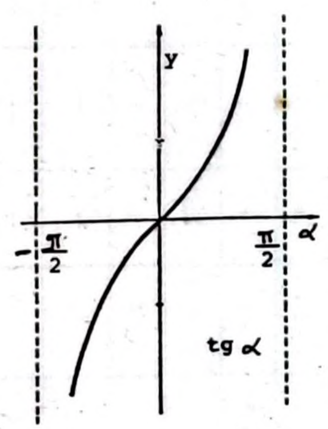
$f^{-1}: [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$ / $f^{-1}(\alpha)$: arc cos α

$g^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ / $g^{-1}(\alpha)$: arc tg α

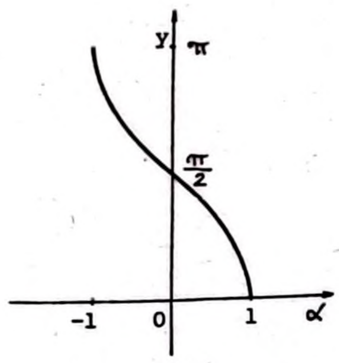
d)



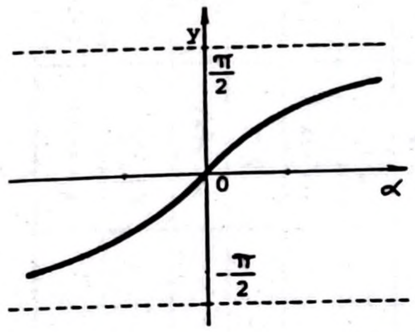
cos α



tg α



arc cos α



arc tg α

EJERCICIO N° 12 (pag 216)

1° PARTE

	FUNCION	FORMULA	CONJUNTO IMAGEN	IMAGEN de -2	GRADO	COEFIC. PRINC.	CEROS	PENDIENTE de f_1 y f_3	VERTICE de f_2	ECUAC. EJE de f_2	FUNCION INVERSA
a)		$y = 5x-7$	$\mathbb{R}$	-17	1	5	$\frac{7}{5}$	5	—	—	$f_1^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$
b)		$y=x^2+2x-8$	$[-9;+\infty]$	-8	2	1	-4 y 2	—	(-1;-9)	x=-1	—
c)		$y=7$	$\{7\}$	7	0	7	—	nula	—	—	—
d)		$y = x^3+1$	$\mathbb{R}$	-7	3	1	-1	—	—	—	$f_4^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f_4^{-1} = \sqrt[3]{x-1}$
e)		$y = (\frac{1}{2})^x$	$\mathbb{R}^+$	4	—	—	—	—	—	—	$f_5^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} / f_5^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
f)		$y = \text{sen } x$	$[-1;1]$	—	—	—	0	—	—	—	—

2° PARTE

abscisa al origen: $\frac{7}{5}$

ordenada al origen: -7

UNIDAD IV : ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES.

ECUACIONES ALGEBRAICAS ENTERAS O POLINOMICAS.

CON UNA VARIABLE O INCOGNITA:

¿Recuerda usted qué es una ecuación?
Seguramente sí. No obstante para "refrescar" este concepto, le proponemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Sea la función polinómica:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = 3x - 6$$

Sabemos que el cero o raíz de esta función es el número real cuya imagen es nula; o sea, el número que satisface la igualdad:

$$3x - 6 = 0$$

Es decir, $f(x) = 0$ igualdad que recibe el nombre de **ecuación** asociada a la función f.
La misma **se satisface** para $x = 2$ pues

$$3.2 - 6 = 0$$

Usted recordará que este concepto ya lo habíamos utilizado en la unidad II cuando se abordó el tema obtención de raíces de un polinomio. En esa oportunidad no habíamos definido formalmente el concepto, que ahora sí presentamos.

Entonces, he aquí el enunciado general:

> Se llama **ecuación** a toda igualdad que se satisface para determinados valores de la/s variable/s que en ella figura/n.

Es oportuno que establezcamos la diferencia entre este concepto y el de identidad.
¿Usted lo recuerda? Trate de definirlo.
. . . . . .

Verifique si su respuesta es análoga a la siguiente:

> Las identidades son igualdades que se verifican para cualquier valor de la/s variable/s que en ella/s figura/n.

Ejemplos:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$(y + 3)^2 = y^2 + 6y + 9$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Continuando con nuestro ejemplo, decimos que 2 es **raíz o solución** de la ecuación considerada, pues 2 es raíz o cero de la función polinómica a la que está asociada la ecuación.
En general:

> a es raíz o solución de $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$

Agregamos:

> El conjunto $S = \{2\}$ cuyo elemento es raíz de la ecuación, se denomina **conjunto solución de la ecuación** y cuando -como en este caso- tiene un número finito de elementos, se dice que la ecuación es **compatible determinada.**

Luego, **resolver** una ecuación (cualquiera que sea) significa hallar el conjunto que tiene por elementos a las raíces de la ecuación.

¿Cómo factorear nuestra ecuación en función de sus raíces?

Para ello debemos proceder en forma similar a lo visto en factoreo de polinómios (Unidad II).

Así resulta:

$$3(x-2) = 0$$

↳ raíz

Vayamos al ejemplo 2:

Sean las funciones:

a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; g(t) = t^3 - 3t^2 - 6t + 8$

y

b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; h(s) = s^4 + 1$

Para cada una de estas funciones, escriba en las líneas de puntos:

1) Ecuación asociada

a) $t^3 - 3t^2 - 6t + 8 = 0$ b) $s^4 + 1 = 0$

2) Raíces de la ecuación

a) $-2;\ 1\ y\ 4$ b) —

3) Conjunto solución

a) $S = \{-2, 1, 4\}$ b) $S = \emptyset$

4) Ecuación factoreada

a) ..... b) .....

Le proponemos que controle sus respuestas con las nuestras.

1) a) $t^3 - 3t^2 - 6t + 8 = 0$ b) $s^4 + 1 = 0$

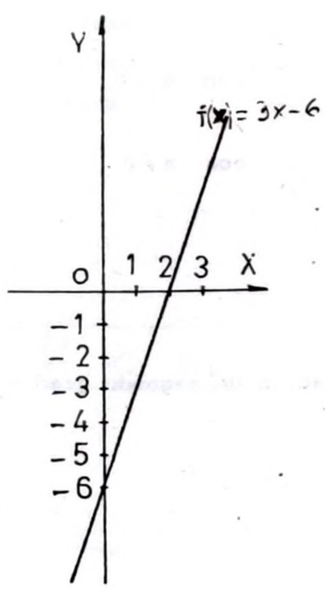
2) a) $-2;\ 1\ y\ 4$ b) no son números reales

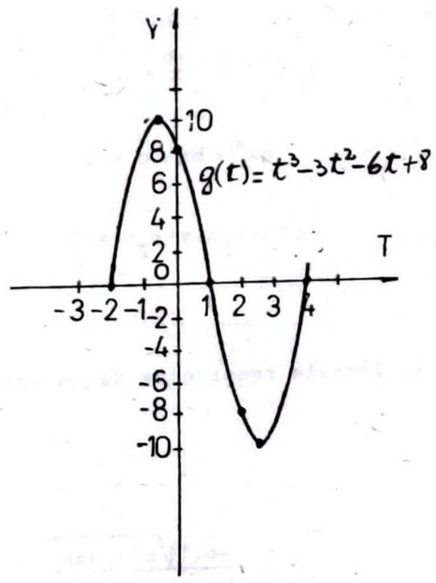
3) a) $S = \{-2, 1, 4\}$ b) $S = \emptyset$

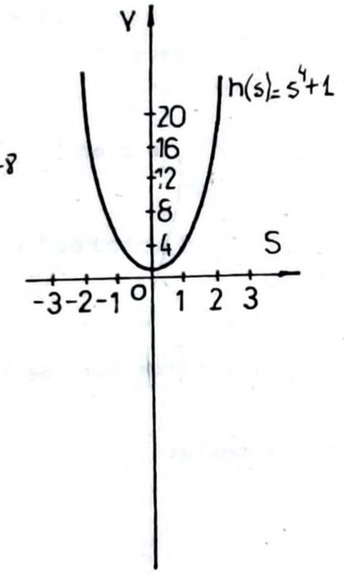
4) a) $(t+2)(t-1)(t-4) = 0$ b) no se puede factorear en función de sus raíces.

Nota: cuando $S = \emptyset$ se dice que la ecuación es **incompatible.**

Si trazamos las gráficas de las funciones polinómicas anteriores, se tiene:







¿Qué relación observa entre las raíces de cada ecuación y las intersecciones de las gráficas con el eje de abscisas? Enuncie esta observación:

En efecto, las raíces de las ecuaciones son las abscisas de los puntos en los cuales la curva corta al eje de abscisas.

ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Dada su importancia, haremos un estudio más detallado de esta clase de ecuaciones.

Sabemos que estas ecuaciones son de la forma:

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{con } a_2 \neq 0$$

o bien: $$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con } a \neq 0$$

factoreada: $$a(x-x_1)(x-x_2) = 0$$

¿Se acuerda cómo es la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado?

Veámosla:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde:
el radicando se denomina discriminante y se simboliza:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Obviamente, el discriminante puede ser:

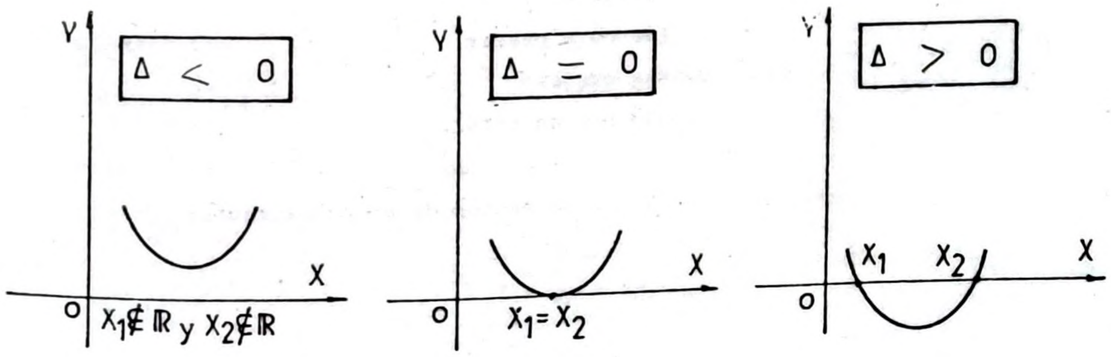
$$\Delta > 0 \ , \quad \Delta = 0 \ , \quad \Delta < 0$$

¿Cómo son, en cada uno de estos casos, las raíces x_1 y x_2 de la ecuación dada?

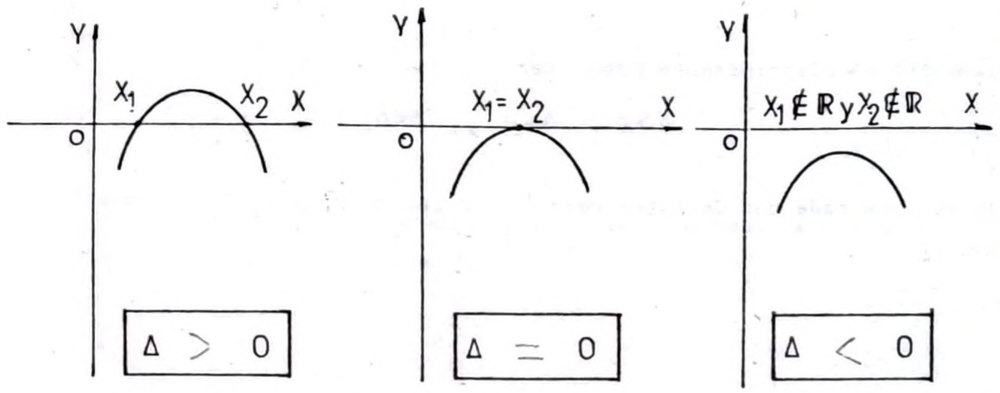
Controle sus respuestas con las siguientes:
En el primer caso, son reales y distintas: $x_1 \in \mathbb{R}$; $x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 \neq x_2$.
En el segundo caso, son reales e iguales: $x_1 \in \mathbb{R}$; $x_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1 = x_2$ (raíz doble).
En el tercer caso, no son reales: $x_1 \notin \mathbb{R}$ y $x_2 \notin \mathbb{R}$

Le proporcionamos las siguientes gráficas de funciones de segundo grado para que usted complete los rectángulos con el signo que en cada caso corresponde:

1) $a > 0$



2) $a < 0$



¿Sus respuestas son, para ambos casos, como las que siguen?

$\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$

Ahora le proponemos que busque la solución a este problema, recurriendo al álgebra:

Un rebaño de ovejas
en el corral está.
A la octava parte al cuadrado
se llevaron a esquilar.
Las doce restantes
al prado fueron a pastar,
dime cuántas ovejas
en el rebaño hay en total.

(Recreación de un poema indio)

$\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$

$x^2 \cdot \frac{1}{64} + 12 = x$

$x^2 \frac{1}{64} - x + 12 = 0$

$+1 \pm \frac{1}{2}$ → 48 y 16

$\frac{1}{32}$

$\frac{1}{64} + 12 = \frac{1+768}{64} = \frac{769}{64}$

Observe si el camino que usted siguió para buscar la solución es semejante a éste:

Si al total de ovejas lo designamos con la variable x, la traducción del verso al lenguaje simbólico matemático es:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Resolviendo esta ecuación, se llega a: $x_1 = 48$ y $x_2 = 16$
Es decir, el rebaño puede estar formado por 48 ovejas o por 16, ya que ambos resultados satisfacen las condiciones del enunciado.

¿Cómo le fue en la resolución? ¿Todo bien? Si es así, continue con el próximo tema.
Si aún no encontró el camino correcto, intente hacerlo otra vez.

ECUACIONES ALGEBRAICAS ENTERAS CON DOS VARIABLES O INCÓGNITAS

Vamos a proceder en forma análoga a lo visto en ecuaciones enteras con una incógnita; entonces, vayamos a un primer ejemplo.

Ejemplo 1:

$$3x - 2y = 0 \qquad (1)$$

Esta igualdad recibe el nombre de **ecuación algebraica entera con dos variables o incógnitas**, asociada a la función cuya fórmula es

$$f(x;y) = 3x - 2y$$

La ecuación (1) se satisface para infinitos pares ordenados de números reales tales como:

$(0;0)$ pues $3.0 - 2.0 = 0$

$(1;\frac{3}{2})$ pues $3.1 - 2.\frac{3}{2} = 0$

$(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2})$ pues $3(-\frac{1}{3}) - 2(-\frac{1}{2}) = 0$

... ...

... ... etc.

¿Podría usted señalar cuáles son las raíces de la ecuación?

¡Claro! Son los pares ordenados de números reales que hemos consignado antes.

En general:

$(a;b)$ es raíz de $f(x;y) = 0 \Leftrightarrow f(a;b) = 0$

Ahora bien,

Dado que el conjunto solución de estas ecuaciones está formado por infinitos elementos, se dice que estas ecuaciones son compatibles indeterminadas.

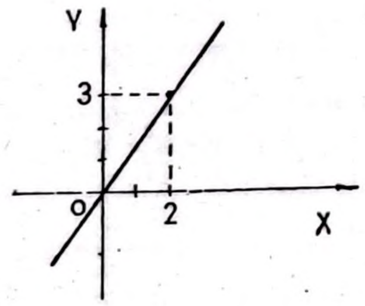
¿Y qué curva se obtiene si a dicho conjunto solución se lo representa gráficamente?

Tal conjunto solución está dado por los infinitos puntos de la recta (pues es una ecuación de primer grado) cuya fórmula es:

$$3x - 2y = 0$$

o bien

$$y = \frac{3}{2}x$$



Para responder:

¿Cuál es la pendiente de esta recta?

.....

¿Cuál es la ordenada de origen?

.....

Esperamos que sus respuestas hayan sido $\frac{3}{2}$ y 0, respectivamente.

Pasemos al

Ejemplo 2:

$$x^2 - 3x - y = 0$$

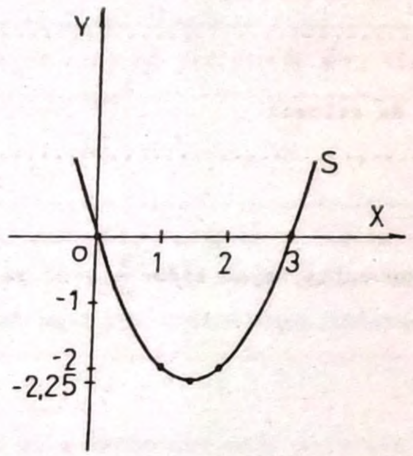
¿Qué puede expresar en este caso con respecto al número de raíces de la ecuación y con respecto a la representación gráfica de su conjunto solución?

Así es: esta ecuación también es compatible indeterminada y sus infinitas raíces son los puntos de una parábola (pues es una ecuación de segundo grado en una de las variables).

En cuanto a su fórmula es:

$$y = x^2 - 3x$$

Gráficamente:



EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página N° 301)

EJERCICIO N° 1

Marque una cruz en el casillero que corresponda a la respuesta correcta.

	Raíz de la ecuación	$4x + 20 = 0$	$2x^2 + 9x - 5 = 0$	$2x^3 + 7x^2 - 14x + 5 = 0$
a)	-5	X	X	X
b)	$\frac{1}{2}$		X	X
c)	1			X

EJERCICIO N° 2

Resuelva las siguientes ecuaciones y luego exprese el conjunto solución correspondiente en la última columna.

	ECUACION	CONJUNTO SOLUCION
a)	$5(x-1) - 2 = 0$	$S\{\frac{7}{5}\}$ $5x-7=0$
b)	$x(2x+3) + 1 = 0$	$S=\{-1,-\frac{1}{2}\}$ $2x^2+3x+1=0$
c)	$6(x^2 + \frac{1}{2}x) = -2$	$6x^2+3x+2=0$
d)	$x^2(x-2) - x + 2 = 0$	$S=\{1,-2\}$ $x^3-2x^2-x+2=0$

$\Delta < 0 \Rightarrow S = \phi$

$(x-1)\,x^2-x-2$

$(x-1)(x+2)(x-1)$

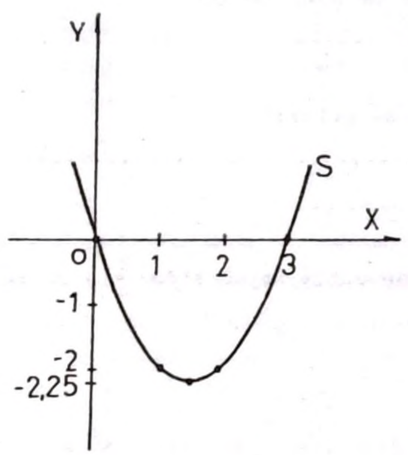
$(x-1)^2(x+2)=0$

Así es: esta ecuación también es compatible indeterminada y sus infinitas raíces son los puntos de una parábola (pues es una ecuación de segundo grado en una de las variables).

En cuanto a su fórmula es:

$$y = x^2 - 3x$$

Gráficamente:



EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página N° 301)

EJERCICIO N° 1

Marque una cruz en el casillero que corresponda a la respuesta correcta.

	Raíz de la ecuación	$4x + 20 = 0$	$2x^2 + 9x - 5 = 0$	$2x^3 + 7x^2 - 14x + 5 = 0$
a)	-5	X	X	X
b)	$\frac{1}{2}$		X	X
c)	1			X

EJERCICIO N° 2

Resuelva las siguientes ecuaciones y luego exprese el conjunto solución correspondiente en la última columna.

	ECUACION	CONJUNTO SOLUCION
a)	$5(x-1) - 2 = 0$	$S\{\frac{7}{5}\}$ $5x-7=0$
b)	$x(2x+3) + 1 = 0$	$S=\{-1,-\frac{1}{2}\}$ $2x^2+3x+1=0$
c)	$6(x^2 + \frac{1}{2}x) = -2$	$6x^2+3x+2=0$
d)	$x^2(x-2) - x + 2 = 0$	$S=\{\pm1,2\}$ $x^3-2x^2-x+2=0$

$\Delta < 0 \Rightarrow S = \emptyset$

$(x-1)x^2-x-2$

$(x-1)(x+2)(x-1)$

$(x-1)^2(x+2)=0$

EJERCICIO N° 3

Factoree cada una de las ecuaciones que acaba de resolver.

a) .....

b) .....

c) .....

d) .....

EJERCICIO N° 4

Sea $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ una ecuación algebraica entera de grado n, con sus n raíces racionales: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.
Factoree en función de sus raíces la ecuación dada.

.....

EJERCICIO N° 5

Calcule k para que la siguiente ecuación en la variable x, tenga sus raíces iguales.

$$5kx^2 - (2k + 10)x + 4 = 0$$

k = ...

EJERCICIO N° 6

Indique para qué valor real de k la ecuación $3x^2 + kx - 2 = 0$, tiene una raíz igual a -2.

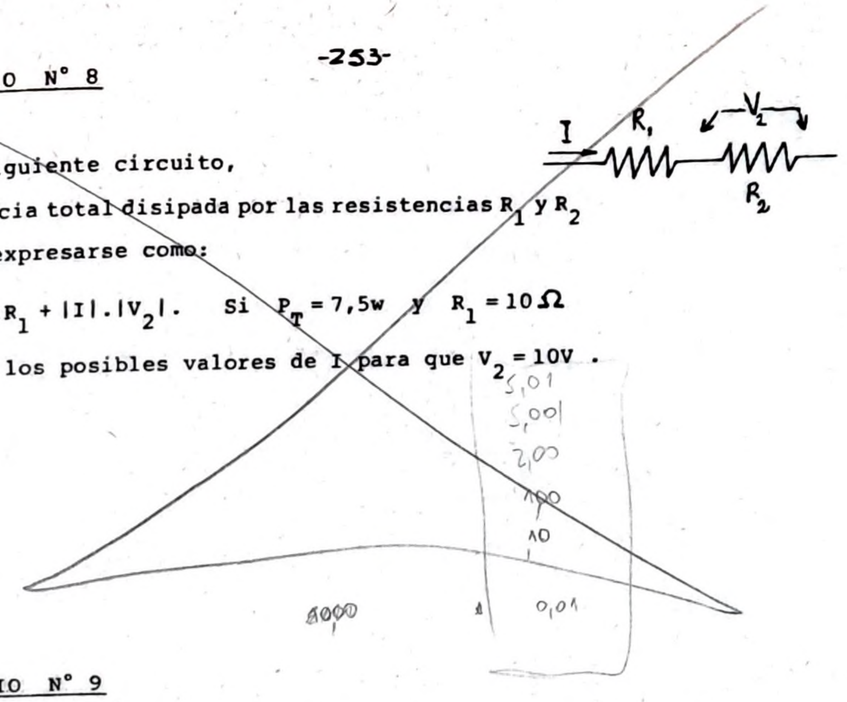
a) Valor real de k .....

b) ¿Por qué? .....

EJERCICIO N° 7

Calcule la diagonal de un paralelepípedo rectángulo de 3 cm de altura y cuya base es un cuadrado de 36 cm^2 de superficie.

EJERCICIO N° 8



En el siguiente circuito,
la potencia total disipada por las resistencias R_1 y R_2 pueden expresarse como:

$P_T = I^2 . R_1 + |I| . |V_2|$. Si $P_T = 7{,}5w$ y $R_1 = 10\,\Omega$

Calcule los posibles valores de I para que $V_2 = 10V$.

EJERCICIO N° 9

Un punto material se mueve sobre el eje x con ecuación horaria:

$$x = 4t - 2t^2$$ (t en segundos, x en cm)

Indique para qué instantes la posición (abscisa) adquiere los siguientes valores:

a) x=2 [ ] ¿Por qué? .....
.....

b) x=8 [ ] ¿Por qué? .....
.....

EJERCICIO N° 10

Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Uno de ellos admitió que los apretones de manos fueron 66. (*)
Indique el número de personas que asistieron a la reunión.

ASISTIERON .... PERSONAS

Ayudita: Si A le estrecha la mano a B, se considera que es el mismo apretón de manos que B le da a A.

(*) **Fuente:** Algebra recreativa de Y. PERELMAN.

EJERCICIO N° 11

Sea x_o la raíz de la ecuación $\frac{x}{a} - 2b = 2a - \frac{x}{b}$ con $a>0$, $b<0$ y $|a| \neq |b|$.

Marque con una cruz la afirmación que resulte verdadera.

a) $x_o = 0$ ☐

b) $0 < x_o \leq 1$ ☐

c) $x_o < 0$ ☒

d) $x_o > 1$ ☐

importante indica divisor distinto de 0

EJERCICIO N° 12

Sea el polinomio $P(x) = 2hx^2 + 4kx - 3$.

Determine h y k para que P(x) sea divisible por x-2.

a) h= $\frac{-k+3}{8}$ k=.....

b) ¿Cuantas soluciones es posible obtener? infinitas

c) ¿Por qué? como indeterminada

d) Exprese por lo menos tres soluciones posibles.

h= $\frac{3}{8}$ y k= 0 ; h= $\frac{1}{4}$ y k= $\frac{1}{8}$; h= 0 y k= $\frac{3}{8}$

o bien ($\frac{3}{8}$; 0) , ($\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$) y (0 ; $\frac{3}{8}$)

EJERCICIO N° 13

1° PARTE

Escriba una ecuación que corresponda a la recta que pasa por el punto P = (1; 2) y tiene pendiente 3.

.....

$y = mx + b$

$2 = 3 \cdot 1 + b$

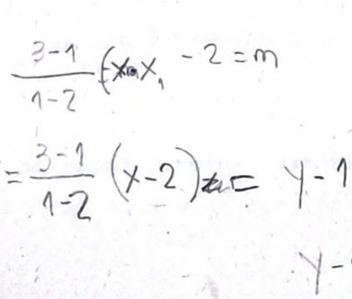
EJERCICIO N° 14

Grafique el conjunto de las ecuaciones siguientes:

$2x^2 - y = 0$

$y = 2x^2$

x	y
0	2
1	2

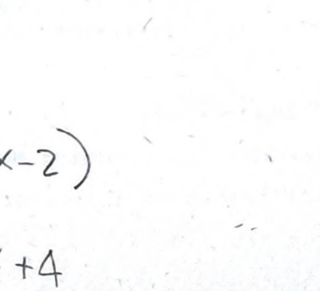


$2x^2 - y = 0$

$x^2 = y$

$(x-3)^3 - y = 0$

$(x-3)^3 = y$

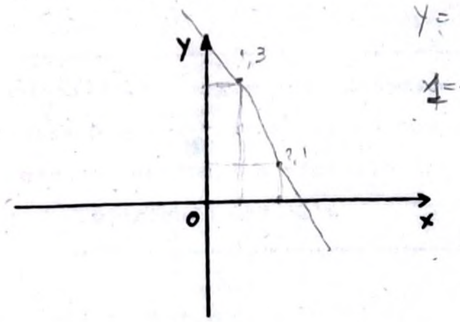


2° PARTE

Escriba una ecuación que corresponda a la recta determinada por los puntos A = (2; 1) y B = (1; 3) , luego grafique la recta.

a) .....

b)



$y = mx + b$

$1 = -2x + b$

$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

$y - y_1 = \frac{3-1}{1-2}(x - x_1) \quad -2 = m$

$y - 1 = \frac{3-1}{1-2}(x-2) \quad y - 1 = -2 \cdot (x-2)$

$y - 1 = -2x + 4$

$y = -2x + 5$

ECUACIONES ALGEBRAICAS NO ENTERAS O FRACCIONARIAS

Consideremos las siguientes funciones racionales no enteras o fraccionarias:

Ejemplo 1:

$$f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \frac{x-3}{2} - \frac{(x-2)^2}{2x} + \frac{3}{2}$$

Ejemplo 2:

$$g: \mathbb{R}-\{0,1\} \to \mathbb{R} \quad / \quad g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1+x}{x^2-x} + \frac{1}{x}$$

Sabemos que los ceros o raices de cada una de estas funciones son los números reales cuyas imágenes son nulas, o sea, los números reales que satisfacen las siguientes igualdades:

$\frac{x-3}{2} - \frac{(x-2)^2}{2x} + \frac{3}{2} = 0$ para el ejemplo 1

$\frac{1}{x-1} + \frac{1+x}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 0$ para el ejemplo 2

Pues bien, cada una de estas igualdades recibe el nombre de **ecuación fraccionaria.**

> En general, las ecuaciones fraccionarias son de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ siendo $Q(x)$ distinto del polinomio nulo y de una constante.

Los números reales que satisfacen una ecuación fraccionaria son sus raíces reales.

¿Cómo hallar dichas raíces?

Primero, transformamos la ecuación en una algebraica entera, luego la resolvemos y verificamos si los valores obtenidos son raíces de la ecuación fraccionaria dada.

Retomemos el ejemplo 1:

Sea: $\frac{x-3}{2} - \frac{(x-2)^2}{2x} + \frac{3}{2} = 0$

¿Cómo hace para transformarla en una ecuación algebraica entera?

..... $(x^2-3x) - (x-2)^2 + 3x = 0$ (2x)

.....

En efecto, conviene multiplicar ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores, o sea, por 2x.

Así, resulta:

$$x(x-3) - (x-2)^2 + 3x = 0$$

desarrollando: $x^2 - 3x - x^2 + 4x - 4 + 3x = 0$

$$4x - 4 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

Luego, como este valor satisface la ecuación dada, resulta:

$$\boxed{S = \{1\}}$$

Ejemplo 2:

Sea: $\frac{1}{x-1} + \frac{1+x}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 0$

Si procedemos en forma similar al ejercicio anterior, entonces multiplicamos ambos miembros por $x(x-1)$, así resulta:

$$x + 1 + x + x - 1 = 0$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

¿El valor obtenido satisface la ecuación dada?

.....

Claro, no la satisface, por lo que:

$$S = \emptyset$$

o sea, la ecuación es incompatible ¿verdad?

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página N° 305)

EJERCICIO N° 15

Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{x-1}{x^2-4x+4} + \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2}$

b) $\dfrac{2x^2}{(3x-9)(x^2-9)} + \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{x-2}{x^2-6x+9} = 0$

a) .....

b) .....

EJERCICIO N° 16

Si al recíproco de un número natural se le suma el cuádruplo de su cuadrado, se obtiene tres.

Indique cuál es dicho número natural.

.....

ECUACIONES NO ALGEBRAICAS

Comenzamos con las ECUACIONES EXPONENCIALES:

Consideremos, por ejemplo, la siguiente ecuación:

$$3^{\frac{x}{2}} = 27^{-\frac{1}{2}}$$

¿Dónde figura la incógnita?

.....

¡Claro! La incógnita se halla en el exponente.

Entonces:

> Las ecuaciones que tienen la incógnita en el exponente se denominan ecuaciones exponenciales.

¿Cómo hallar sus raíces?

Por ejemplo, podemos reducir ambas potencias a la misma base.

Así: $3^{\frac{x}{2}} = (3^3)^{-\frac{1}{2}}$

O sea: $3^{\frac{x}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}$

Luego: $\dfrac{x}{2} = -\dfrac{3}{2}$

Por lo tanto: $x = -3$

Como este valor satisface la ecuación dada, resulta:

$$S = \{-3\}$$

Ecuaciones Logarítmicas

Atendamos a la ecuación:

$$\log_2 (3x+2) = 2$$

Observamos que la incógnita está afectada, por lo menos un vez, por un logaritmo.

De esta manera, enunciamos:

> Las ecuaciones cuyas incógnitas están afectadas, por lo menos una vez, por un logaritmo, se llaman **logarítmicas.**

Para hallar el conjunto solución, podemos aplicar la definición de logaritmo:

Así: $3x + 2 = 2^2$

Operando: $3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

Como este valor satisface la ecuación original, resulta:

$$S = \{\frac{2}{3}\}$$

Ecuaciones Trigonométricas

Para comenzar, le presentamos un problema:

Supongamos que para acceder al garage de una casa, hay una rampa inclinada de 4 m de largo. Si la proyección de la misma sobre el plano horizontal es de 2 m, ¿qué ángulo forma la rampa con su proyección sobre dicho plano?

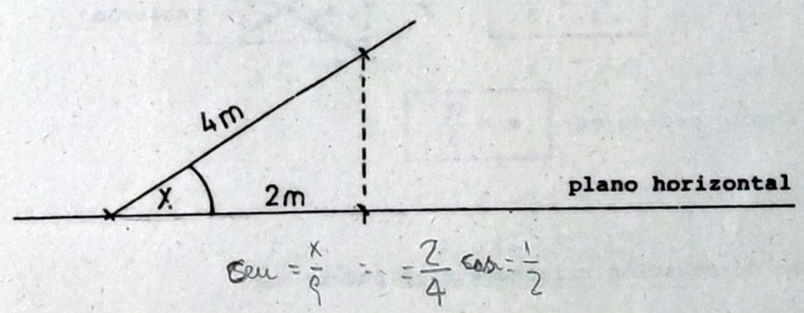
.....

.....

.....

Le sugerimos que para visualizar más el problema haga una "figura de análisis", o sea, una figura representativa del problema aunque no tiene por qué respetar las medidas reales (obviamente) que en él figuran:

Así:



¿Cómo relacionar datos con incógnita?

Ciertamente, a través de la función coseno.

Resulta:

$$\cos x = \frac{2}{4} \qquad \text{con } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Tenemos una ecuación en la cual la incógnita está afectada por una función trigonométrica.

Luego, expresamos:

> **Se llama ecuación trigonométrica a aquella en la cual la incógnita está afectada por alguna función trigonométrica.**

¡Sígamos para ver cómo resolver la ecuación dada!

Procederemos así:

$$x = \text{arc cos } \frac{1}{2}$$

O sea: $\boxed{x_1 = \frac{\pi}{3}}$ y ~~$\boxed{x_2 = 5\frac{\pi}{3}}$~~ absurdo

Luego, el ángulo pedido es $\boxed{x = \frac{\pi}{3}}$

Otro ejemplo de ecuación trigonométrica podría ser:

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \qquad \text{con } 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

¿Cómo lo resolvería? Hágalo.

Compare su trabajo con el nuestro:

hacemos "un cambio de variable", por ejemplo:

$$\cos\alpha = x$$

Reemplazamos en la ecuación dada y se tiene:

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Resolviéndola, resultan:

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad y \qquad x_2 = -1$$

Luego,

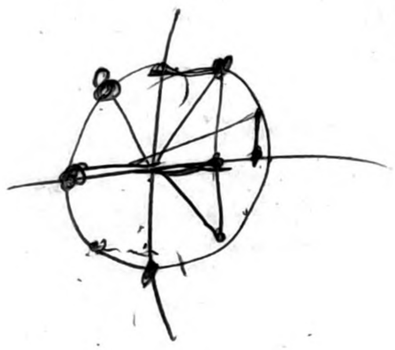
$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad y \qquad \cos\alpha_2 = -1$$

Así:

$$\alpha_1 = \text{arc cos } \frac{1}{2} \qquad y \qquad \alpha_2 = \text{arc cos } (-1.$$

O sea:

$$\boxed{S = \{\frac{\pi}{3}, \pi, 5\frac{\pi}{3}\}}$$



EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página N° 305)

EJERCICIO N° 17

Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $5^{x+1} + 5^{x} = 750$

b) $4^{z-1} - 2^{z+3} = -28$

c) $\log_3 x + \log_9 x = \log_{81} x + \frac{5}{2}$

d) $10^{\log(x^2-2)} - 2 = 0$

e) $\log \frac{2u+1}{u-1} = 0$

f) $\cos 2x = 0$ con $0° \leq x < 360°$

g) $\operatorname{sen}^2 \gamma = \frac{1}{2}$ con $\gamma \in [0; 2\pi]$

h) $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ con $0 < x < \pi$

i) $2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 0$ con $0 \leq \alpha < 2\pi$

$|x| \leq 3 = -3 \leq x \leq 3$

$|x| > 3 = x > 3$

 $x < -3$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS

El primer interrogante que nos planteamos es:

¿Qué es un sistema de ecuaciones?

Para llegar a la respuesta, le proponemos —por ejemplo— que considere el siguiente enunciado:

Juan tiene dos voltímetros y un osciloscopio. El valor de cada voltímetro es la octava parte del valor del osciloscopio.
El desea comprar un auto que cuesta ₳ 5300, para lo cual se ve obligado a vender los tres aparatos y contraer una deuda por ₳ 1200.

¿Cuánto recibirá por cada aparato?
¿Cómo resolvería usted este problema? ¿Haría cálculos mentalmente para llegar a la solución?
¿Escribiría simbólicamente la situación presentada?

.....
.....
.....

Si bien éste es un problema muy sencillo y usted pudo obtener la respuesta por "tanteo", le sugerimos que se acostumbre como método de trabajo, a anotar simbólicamente datos e incógnitas de un problema para luego tratar de relacionarlos y luego llegar a la solución.
Es más, si el problema puede interpretarse mejor haciendo una "figura de análisis", le aconsejamos que lo haga ¡puede resultarle muy útil!

Volviendo a nuestro problema, cuando dice que el valor de cada voltímetro es la octava parte del valor del osciloscopio, seguramente habrá simbolizado esta relación de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{8}\,e$$ (V: valor del voltímetro; e: valor del osciloscopio)

En cuanto al segundo párrafo del problema, quizás usted lo habrá simbolizado así:

$$2v + e + 1200 = 5300$$

Evidentemente, tenemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y, por lo tanto, cada una de ellas es compatible indeterminada.
Nos interesa hallar la o las raíces (si existen) que satisfacen simultáneamente estas ecuaciones.
Ello lo indicamos:

$$\begin{cases} V = \frac{1}{8}\,e \\ 2V + e + 1200 = 5300 \end{cases}$$

obteniéndose así lo que se denomina **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

¿Cómo simbolizamos en general a esta clase de sistemas?

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

o bien

$$\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$$

¿Qué involucra resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?

Pues significa: hallar el conjunto que tiene por elementos a las raíces (si existen) que satisfacen a ambas ecuaciones.

¿Cómo resolvería usted el sistema formado?

$$\begin{cases} V = \frac{1}{8}\,e & ① \\ 2V + e + 1200 = 5300 & ② \end{cases}$$

.....

.....

.....

Seguramente, sustituiría V de ① en ②, resultando:

$$2\cdot\frac{1}{8}\,e + e + 1200 = 5300$$

Si se resuelve:

$$\boxed{e = 3280}$$

Luego, reemplazando e de ① en ②, se tiene:

$2V + 8V + 1200 = 5300$, pues de ①: $8V = e$

Operando:

$$\boxed{V = 410}$$

¡Ya tenemos la respuesta!

Juan recibirá ₳ 3280 por el osciloscopio y ₳ 410 por cada voltímetro.

Recordemos

Este sistema, como todos los que tienen solución, se dice compatible. Cuando esa solución es finita, se llama compatible determinado.

Volvamos al problema anterior.

Para obtener el valor de **V**, ¿podríamos haber reemplazado el valor de α hallado en ① o en ②?

.....

.....

.....

¿Qué le encuentra de conveniente y qué de inconveniente a esta sustitución?

.....

.....

.....

Si, es posible reemplazar α en ① o en ②, obteniendo el valor de **V** en forma más rápida, pero... corremos el riesgo de calcular mal α y, en consecuencia, también tendremos mal **V**.

Con frecuencia, en nuestro quehacer cotidiano, pueden presentarse distintas situaciones que nos van a conducir al planteo de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas ($m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$).

Los sistemas en los cuales m=n se denominan **cuadrados** y si m≠n se llaman **rectangulares**.

Para resolver analíticamente un sistema lineal es conveniente recordar que:

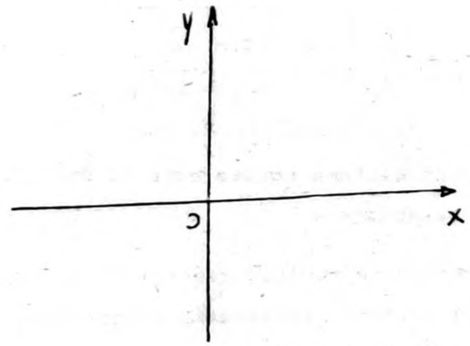
a) Si se cambia el orden de las ecuaciones, se obtiene un sistema con las mismas soluciones que el dado, o sea, se obtiene un **sistema equivalente al planteado.**

b) Si a los términos de una ecuación le sumamos los términos semejantes de otra ecuación del sistema, previamente multiplicados por un número real, se obtiene un **sistema equivalente** al dado.

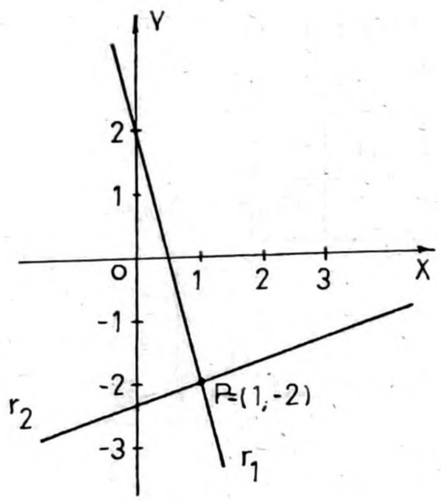
Ilustremos lo expresado con un caso.

Resolver: $\begin{cases} 4x + y - 2 = 0 \\ x - 3y - 7 = 0 \end{cases}$

Sabemos que cada ecuación representa gráficamente una recta ¿no es así? Luego, ¿cuál será la solución gráfica del sistema?



En efecto, es la intersección de ambas rectas:



r_1: $y = -4x + 2$

r_2: $y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$

$S = \{(1; -2)\}$

Con respecto a la resolución analítica de un sistema, se puede obtener el conjunto solución por distintos caminos: sustitución, igualación, etc., que usted seguramente habrá estudiado en la escuela secundaria. ¿Estamos en lo cierto?

La selección del método dependerá del caso particular que se presente. Así, en el ejemplo con el que hemos iniciado el tema de sistemas de ecuaciones, es muy evidente que conviene aplicar el método de "sustitución". Ahora, le sugerimos para el presente ejercicio y para todos los similares a él, la siguiente disposición práctica en la que sólo figuran los coeficientes y los términos independientes debiendo figurar estos últimos en el segundo miembro de cada ecuación:

4	1	2
1	-3	7

Trataremos de obtener un **sistema equivalente al dado**, con menor número de incógnitas en las ecuaciones.

Para ello, le proponemos (por ejemplo) transcribir la primera ecuación y a la segunda, sumarle la primera previamente multiplicada por 3, para eliminar el término en **y** de la segunda ecuación.

Los elementos dispuestos en forma horizontal constituyen lo que se denomina "fila", y por lo tanto, la operación anterior se simboliza así:

$$2^{\circ}\,F + 1^{\circ}\,F \cdot 3$$

Resulta:

4	1	2
13	0	13

Si reconstruímos el sistema:

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 13x = 13 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1} \quad \textcircled{2} \qquad \textcircled{1}$$

Reemplazando ② en ① (¡cuidado!), se tiene:

$$4.1 + y = 2 \Rightarrow \boxed{y=-2}$$

Luego:

$$\boxed{S = \{(1; -2)\}}$$

sistema compatible determinado

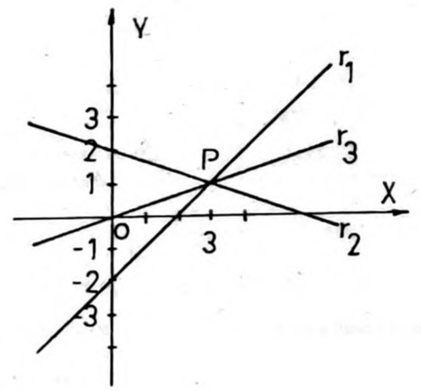
¿Pudo seguirnos en el desarrollo del sistema?

A través de otro ejemplo, podrá afianzar lo visto.

¡Adelante!

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 3y = 6 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Gráficamente, obtenemos un haz de rectas, o sea un conjunto de rectas del plano que pasan por un mismo punto.



r_1: $y = x - 2$

r_2: $y = -\frac{1}{3}x + 2$

r_3: $y = \frac{1}{3}x$

Veamos qué sucede analíticamente:

1	-1	2
1	3	6
1	-3	0
1	-1	2
0	4	4
0	-2	-2

Transcribimos la primera fila.

A la segunda le sumamos la primera previamente multiplicada por -1.

Se simboliza: $2^{\circ}\,F + 1^{\circ}\,F\,(-1)$

A la tercera le sumamos la primera previamente multiplicada por -1.

Se simboliza: $3^{\circ}\,F + 1^{\circ}\,F\,(-1)$

¿Cómo son las dos últimas ecuaciones?

.....

.....

Claro, son equivalentes pues las constantes son proporcionales.

Después, al reconstruir el sistema consideramos sólo una de ellas:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad y=1 \quad \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$$

Reemplazando ② en ① (¡cuidado!), se tiene:

$$x-1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

Luego:

$$\boxed{S = \{(3; 1)\}}$$

Sistema compatible determinado

¡Lápiz y papel para la próxima actividad!

a) Escriba un sistema lineal **incompatible**, formado por dos o más ecuaciones con dos incógnitas.
¿Cuál podría ser la interpretación geométrica del mismo?

b) Escriba un sistema lineal **compatible indeterminado** formado por dos o más ecuaciones con dos incógnitas.
¿Cuál es la interpretación gráfica del mismo?

Para responder a la parte a) de nuestra propuesta existen muchas alternativas, por ejemplo, usted podría considerar las ecuaciones de rectas paralelas (recuerde que tienen igual pendiente) y no coincidentes.

Así:		o bien:	
	$y = 4x + 3$		$4x - y = -3$
	$y = 4x - 5$		$4x - y = 5$
	$y = 4x + 8$		$4x - y = -8$
	$y = 4x - 3$		$4x - y = 3$ etc.

Con respecto a la parte b), pueden considerarse las ecuaciones de dos rectas coincidentes (igual pendiente e igual ordenada al origen)

Así: $2x - 3y = 4$
$4x - 6y = 8$
$-2x + 3y = -4$ etc.

¿Se anima a decir, justificando la respuesta, si son compatibles o incompatibles los siguientes sistemas?:

① $\begin{cases} y = ax + b \\ y = hx + k \end{cases}$ con $a=h$; $b>k$ incompatible

② $\begin{cases} y = ax + b \\ y = hx + k \end{cases}$ con $a<h$

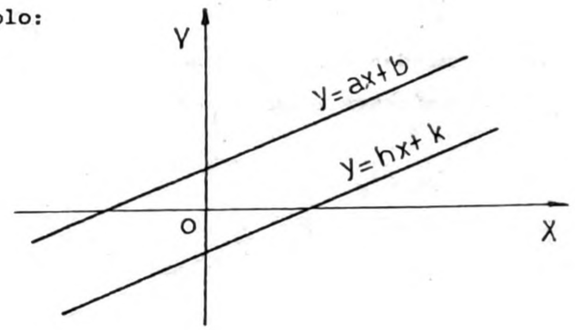
① .....
.....
.....

② .....
.....
.....

Seguramente, después de analizar los datos, usted habrá llegado a las siguientes conclusiones:

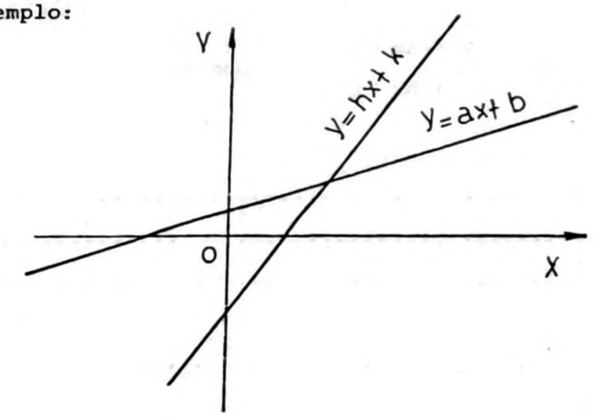
① Este sistema es **incompatible** pues al ser a=h las pendientes de las rectas son iguales y como b≠k (pues b>k) las ordenadas al origen son distintas, o sea, que la representación gráfica corresponde a rectas paralelas.

Ejemplo:



② Este sistema es **compatible determinado** pues las pendientes de las rectas son distintas ya que: a<h.

Ejemplo:



Sistemas de Ecuaciones Lineales con Tres Incógnitas

Estas ecuaciones son de la forma:

$$ax + by + cz + d = 0$$

o bien $f(x;y;z) = 0$

¿Cómo es la representación gráfica de cada una de ellas?
Dichas representaciones son planos y el estudio correspondiente se hará en el curso de Geometría Analítica.

Ahora, pasemos a resolver algunos ejemplos de los sistemas propuestos.

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} x - 3y - z = -3 \\ 2x - 5y + z = -13 \\ -3x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

Recurrimos a la disposición práctica ya propuesta:

1	-3	-1	-3
2	-5	1	-13
-3	1	-2	8

Para eliminar, por ejemplo, la variable **x** en dos ecuaciones, podemos transcribir la primera.
Luego, a la segunda, le sumamos la primera previamente multiplicada por -2.
Se simboliza: $2^{o}\,F + 1^{o}\,F\,(-2)$

A la tercera, le sumamos la primera multiplicada por 3.
¿Cómo lo simbolizamos?
Así: $3^{o}\,F + 1^{o}\,F.3$

De esta manera se llega a:

1	-3	-1	-3
0	1	3	-7
0	-8	-5	-1

Para eliminar una variable en alguna de las dos últimas ecuaciones, por ejemplo **y** en la tercera, transcribimos las dos primeras filas.
Luego, a la tercera le sumamos la segunda previamente multiplicada por 8.
Lo simbolizamos: $3^{\underline{o}}\,F + 2^{\underline{o}}\,F.8$

1	-3	-1	-3
0	1	3	-7
0	0	19	-57

Al reconstruir el sistema:

$$\begin{cases} x - 3y - z = -3 & \textcircled{1} \\ y + 3z = -7 & \textcircled{2} \\ 19z = -57 \Rightarrow \boxed{z = -3} \end{cases}$$

Si reemplazamos (¡Cuidado!) este resultado en ②:

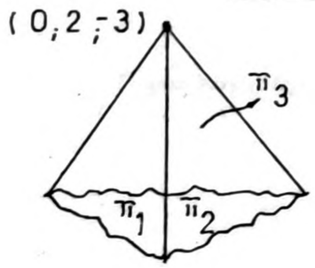
$$y + 3(-3) = -7 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

Sustituyendo (¡Cuidado!) en ① por los valores de **y** y **z** hallados:

$$x - 3.2 - (-3) = -3 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Luego:

$$\boxed{S = \{(0; 2; -3)\}}$$



Sistema compatible determinado, o sea, las ecuaciones dadas corresponden a planos que se interceptan en un único punto.
Se trata de una radiación de planos.

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = 1 \\ 8x - 8y + 8z = 5 \end{cases}$$

¿Se anima a resolverlo usted? ¡Adelante!

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Coteje su respuesta con la nuestra, aunque es necesario tener en cuenta que existen varias alternativas para resolver el ejemplo. Sin embargo, la conclusión final no varía.

1	-1	1	2
3	-3	3	1
8	-8	8	5
1	-1	1	2
0	0	0	-5
0	0	0	-11

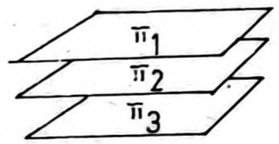
Transcribimos la primera fila
$2^{\underline{o}}\,F + 1^{\underline{o}}\,F\,(-3)$
$3^{\underline{o}}\,F + 1^{\underline{o}}\,F\,(-8)$

Al reconstruir el sistema, se deduce de las últimas dos filas que se ha llegado a un absurdo.

Luego:

$$\boxed{S = \emptyset}$$ **Sistema incompatible**

En este caso, las ecuaciones dadas corresponden a tres planos paralelos.



Observe que los coeficientes de las variables son proporcionales, pero los términos independientes no lo son.

Y si fueran también proporcionales los términos independientes, ¿cómo resultaría el sistema?

compatible indeterminado

En efecto, sería compatible indeterminado pues todas las ecuaciones representarían al mismo plano y los infinitos puntos de este plano serían el conjunto solución del sistema.

Pasemos al ejemplo 3:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 5x + 2y + 5z = 1 \\ 7x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

Procedamos:

2	1	-3	0	
5	2	5	1	
7	3	2	1	
2	1	-3	0	Transcribimos la primera fila
1	0	11	1	2º F + 1º F (-2)
1	0	11	1	3º F + 1º F (-3)
2	1	-3	0	Eliminamos la 2da o 3er fila por ser iguales.
1	0	11	1	
0	1	-25	-2	Transcribimos la segunda fila.
1	0	11	1	1º F + 2º F (-2)

$\begin{cases} y - 25z = -2 \\ x + 11z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -25z = -2 + y \\ 2 - 25z = y \end{cases}$ $y = -2 + 25z$

$x = 1 - 11z$

Al reconstruir el sistema:

$$\begin{cases} y - 25z = -2 \\ x + 11z = 1 \end{cases}$$

Nos conviene escribir todas las variables en función de la/s que se repite/n. En este caso es z.

Luego:

$$y = -2 + 25z$$
$$x = 1 - 11z$$
$$z = z$$

Obviamente, para cada valor de z se obtienen los correspondientes de y y x.

Responda: ¿Cómo se denomina este sistema sabiendo que tiene infinitas soluciones?

¡Claro! Es compatible indeterminado.

Luego, resulta:

terna

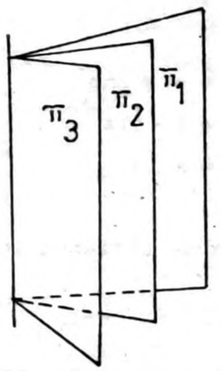
$$S = \{(1 - 11z ; -2 + 25z ; z) \text{ con } z \in \mathbb{R}\}$$

Algunas soluciones particulares pueden ser:

z=0 ⇒ (1; -2; 0)

z=1 ⇒ (-10; 23; 1) etc.

¿Y qué sucede con la representación gráfica del sistema?
Al trazarla, se obtiene un haz de planos, o sea un conjunto de planos que incluyen una recta.



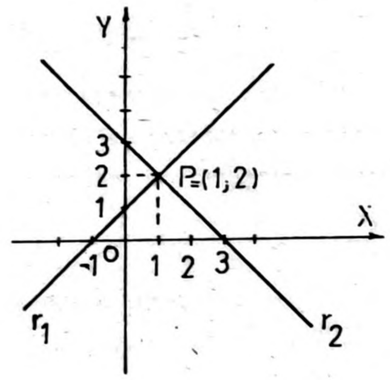
Seguramente, usted advirtió que los infinitos puntos de la recta, eje del haz, son la solución del sistema ¿verdad?

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página N° 305)

ERCICIO N° 18

oporcione un sistema de ecuaciones cuya representación gráfica sea la guiente:



Sistema de ecuaciones

{ .....-x+2y+3.....
{ .....x+2y+3.....

RCICIO N° 19

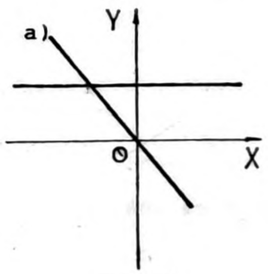
ique para qué valores de k es compatible el siguiente sistema.

$$\begin{cases} 8x + ky = 5 + k \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$$

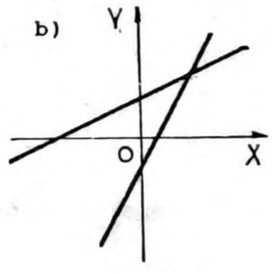
k ≠ 20

EJERCICIO N° 20

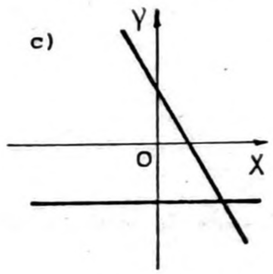
La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un punto cuyas coordenadas tienen distinto signo.
Marque una cruz en el recuadro correspondiente a la gráfica que pueda representar tal sistema, luego justifique su respuesta.

a) 

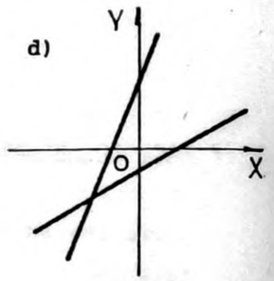
X

b) 

☐

c) 

X

d) 

☐

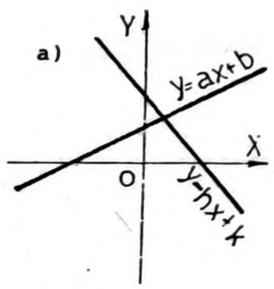
¿Por qué? .....
.....
.....

EJERCICIO N° 21

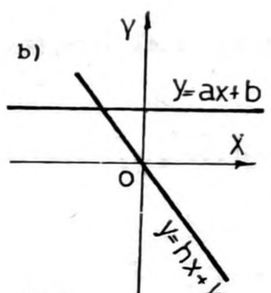
Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = hx + k \end{cases} \quad \text{con} \quad a \geq 0; \quad b \leq 0; \quad h < 0; \quad k \geq 0$$

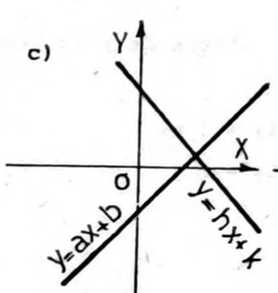
Marque una cruz en el recuadro correspondiente a la gráfica que pueda representar a tal sistema.

a) 

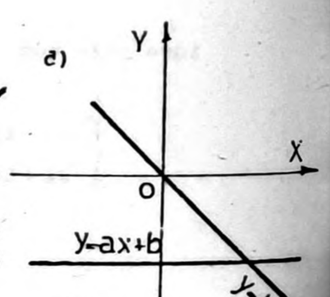
☐

b) 

☐

c) 

☒

d) 

☐

EJERCICIO N° 22

1° PARTE

Invente una situación problemática de su quehacer cotidiano, que lo lleve al planteo de un sistema de la forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

siendo $a=3$, $b=-1$, $c=a+2$, $a'=a^2$, $b'=0$, $c'=b$.

.....
.....
.....

2° PARTE

Resuelva el sistema planteado.

.....

3° PARTE

Verifique la respuesta obtenida.

En efecto: .....
.....

EJERCICIO N° 23

Sabemos que el bronce resulta de la aleación de cobre con estaño, en la proporción (por ejemplo) $\frac{3}{5}$.

Responda. ¿Qué cantidad de cobre y qué cantidad de estaño fue necesario utilizar para obtener 20 kg de bronce.

cobre ..... estaño.....

EJERCICIO N° 24

Sea f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ / $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $f(1) = 2$; $f(-2) = 0$ y $f(-1) = 2$.

Calcule a, b, y c.

a = ... b = ... c = ...

EJERCICIO N° 25

Lea atentamente el siguiente texto:

Visitamos dos islas distantes entre sí; Fiscolandia y Verdemar, en las que se venden dos clases de pescados: aletas y espinas.
En Fiscolandia el precio de un Kg de pescado incluye un impuesto de 25 F, este impuesto es el mismo para todas las clases de pescados. Además, 5 Kg de aletas cuestan lo mismo que 4 Kg de espinas.
En cambio, en la isla Verdemar no existen impuestos, de modo que cada Kg de pescado cuesta 25 F menos que en Fiscolandia.
En Verdemar 5 Kg de aleta cuestan lo mismo que 3 Kg de espina.

Averigüe cuál es el precio por Kilo de dichos pescados en Fiscolandia.

A + (A+25)

Fisc { 5A = 4E ⇒ 5(A+25) = 4(E+25)

Verd { 5A = 3E =

Fisc { 5A = 4E

Verd { 5(A-25) = 3(E-25)

SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Quizás ahora usted se pregunte: ¿Qué es un sistema no lineal?
Bien, para acercarnos a la respuesta, enfrentemos el siguiente ejercicio:

Se necesita hallar la/s intersección/es de la recta de ecuación

$$y = -x + 1$$

con la parábola de ecuación

$$x^2 - 2y = 6$$

a) ¿Cómo simbolizaría usted esta necesidad?

.....
.....

b) ¿Cuántas intersecciones podría obtener como máximo?

.....
.....
.....

c) ¿Puede ser la intersección el conjunto vacío? ¿Cuándo?

.....
.....
.....

d) ¿Cómo resuelve gráficamente y cómo analíticamente, este problema?

Seguramente sus respuestas coinciden con las nuestras, controle:

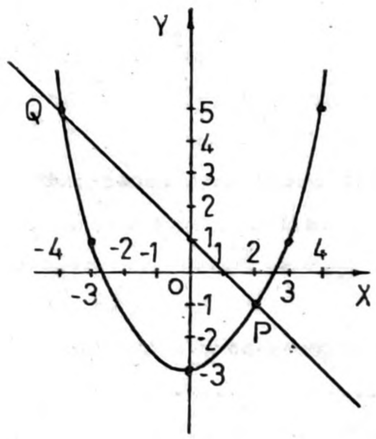
a) Se forma un sistema con ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ x^2 - 2y = 6 \end{cases}$$

b) Como máximo se pueden tener **dos** intersecciones distintas o coincidentes según sea la recta secante o tangente a la parábola, respectivamente.

c) Sí, cuando la recta no es secante y no es tangente a la parábola. En tal caso, el sistema escrito en a) es incompatible.

d) **Solución gráfica:**



Solución analítica:

$$\begin{cases} y = -x + 1 & ① \\ x^2 - 2y = 6 & ② \end{cases}$$

Si sustituimos la **y** de ① en ② se tiene:

$$x^2 - 2(-x + 1) = 6$$

O sea $x^2 + 2x - 8 = 0$ cuyas raíces son $\boxed{x_1 = 2}$ y $\boxed{x_2 = -4}$

Reemplazando estos valores en ①, por ejemplo, se obtienen las correspondientes ordenadas, que son:

$x_1 = 2 \Rightarrow \boxed{y_1 = -1}$ y $x_2 = -4 \Rightarrow \boxed{y_2 = 5}$

Luego, el conjunto solución del sistema es:

$$\boxed{S = \{(2;-1), (-4;5)\}}$$

¿Está conforme con los resultados que obtuvo al hacer el ejercicio precedente?

¿Es conveniente repasar algo de lo ya estudiado?

Si es así, ¡no lo deje para un "mañana lejano"... !

Le planteamos nuevamente la pregunta con la que hemos iniciado esta sección: ¿Qué es un sistema no lineal?

.....

.....

En efecto, es un sistema en el cual figuran ecuaciones no lineales.

Ratifiquemos lo aprendido, resolviendo otra situación.

¿Es compatible o incompatible el sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = a'x^2 + b'x + c' \end{cases}$$

con $a > 0$; $c < 0$; $a' < 0$; $c' > 0$

¡No olvide fundamentar su respuesta!

.....

.....

.....

Así es, el sistema es compatible debido a las concavidades de las parábolas y a los signos de los términos independientes de sus respectivas ecuaciones.

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página N° 307)

EJERCICIO N° 26

Resuelva analítica y gráficamente los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 12 \\ y - x^2 = -6x + 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = (x-3)^3 \\ y = x - 3 \end{cases}$

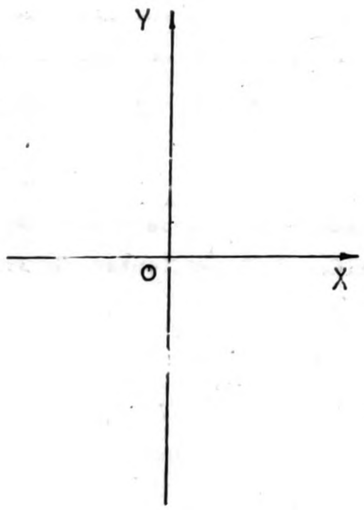
$Y = x^2 - 6x + 5$ ¡igualación

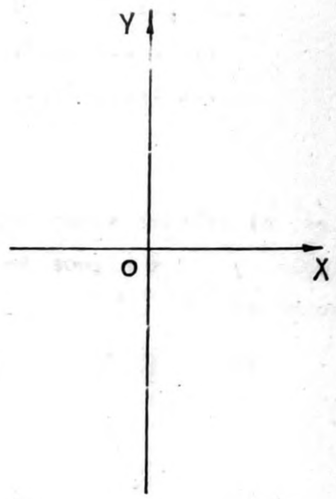
Analíticamente

a) $x^2 - 6x + 5 = -x^2 + 8x - 12 \;/\; 0 = 2x^2 - 14x + 17$

b) $(x-3)^3 = x - 3 \;/\; 0 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x + 3$
$0 = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$
$(x-2)(x^2 - 7x + 12) = (x-2)(x-3)(x-4) = 0$

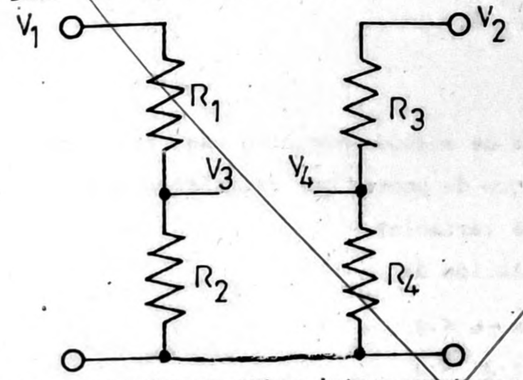
Gráficamente





EJERCICIO N° 27

Dado el siguiente circuito



donde $V_3 = \frac{V_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$; $V_4 = \frac{V_2 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$

Si $V_1 = 10V$ $R_1 = 9000\,\Omega$

$V_2 = 19V$ $R_2 = 1000\,\Omega$

$V_3 = V_4$

De respuestas a estos interrogantes:

a) ¿Cuánto vale R_3 y R_4? $R_3 =$ $R_4 =$

b) ¿Cuántas soluciones puede haber?

¿Por qué?.....

.....

c) Proporcione dos soluciones diferentes

$R_3 = \ldots$ y $R_4 = \ldots$ $R_3 = \ldots$ y $R_4 = \ldots$

d) Si $R_3 = 1800$ ¿Cuánto vale R_4? $R_4 = \ldots$

EJERCICIO N° 28

Lea atentamente.

Un comerciante tiene determinado número de clientes y mercadería suficiente para abastecerlos durante cierta cantidad de días.

Si tuviera 8 clientes menos, la mercadería para los restantes le duraría 22 días más, en cambio si tuviera 16 clientes más , la mercadería le duraría 11 días menos.

Por favor responda:

a) ¿Cuántos clientes tiene el comerciante? .....

b) ¿Para cuántos días le alcanza la mercadería? .....

$\begin{cases} C - 8 = D + 22 \\ C + 16 = D - 11 \end{cases}$ $\begin{cases} (C-8) - (D+22) = 0 \\ (C+16) - (D-11) = 0 \end{cases}$

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN UNA VARIABLE

¿Se anima a resolver una inecuación de segundo grado en una variable?, o sea, ¿se anima a hallar el conjunto de puntos que satisfacen una desigualdad de segundo grado en una variable?
Por ejemplo, hallar el conjunto solución de

$$x^2 - x - 6 < 0$$

o bien $(x+2)(x-3) < 0$

+ − (−x)

= +

.....

.....

.....

Si no ha tenido dificultades para hallar el conjunto pedido ¡adelante! De lo contrario, le ofrecemos la siguiente "ayudita":

1) ¿Qué puede asegurar con respecto a los signos de dos factores si el producto de ambos es, como en este caso, negativo?

.....

2) Plantee tales desigualdades:

a) .....

.....

b) .....

.....

3) ¿Cómo resolvería analítica y gráficamente los sistemas del punto 2)?

a) Analíticamente

.....

.....

Gráficamente

b) Analíticamente

.....

.....

Gráficamente

4) ¿Cuál es, entonces, el conjunto solución pedido?

.....

Controle su trabajo con el siguiente desarrollo:

1) Los signos de los factores son distintos.

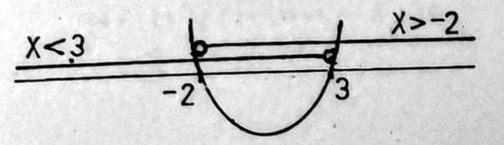
2) a) $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2 < 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$

3) a) Analíticamente:

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < 3 \end{cases} \rightarrow \boxed{A = (-2; 3)}$$

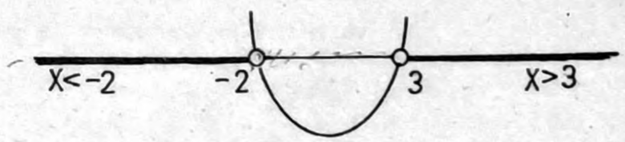
Gráficamente:



b) Analíticamente:

$$\begin{cases} x+2<0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=\emptyset}$$

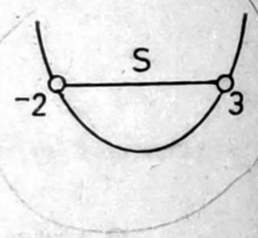
Gráficamente:



4) El conjunto solución es:

$S = A \cup B$

$\boxed{S = (-2; 3)}$



En forma análoga, resuelva:

1) $x^2 - 8 \leq 1$

2) $1 - x^2 < 0$

Confronte sus resultados con los que siguen:

1) $S = [-3; 3]$

2) $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página N° 308)

EJERCICIO N° 29

Exprese en forma de intervalo el conjunto solución de:

a) $x^2 - 8x + 7 < 0$

b) $\dfrac{1}{x^2 - 16} > 0$

c) $\log(x^2 + x - 11) \geq 0$

TRABAJO PRACTICO DE UNIDAD IV: ECUACIONES.

SISTEMAS DE ECUACIONES

(Las respuestas figuran en la página Nº 309)

EJERCICIO N° 1

1° PARTE

Lea atentamente estos enunciados, luego responda.

Al consecutivo de un número n lo elevo al cuadrado. Si al resultado le resto diez y a la diferencia la divido por tres, obtengo cinco.

¿Cuál es el número n? $\frac{(n+1)^2-10}{3}=5$

¿Por qué? despejo n

¿Tuvo que descartar algún número? . ¿Por qué?

2° PARTE

Si al triplo de un número par le sumamos el recíproco de su consecutivo, obtenemos el opuesto del número considerado.

¿Cuál es el número? .....

¿Por qué? .....

.....

3° PARTE

Si al logaritmo en base dos del cubo de un número se le resta 1, se obtiene el logaritmo en base cuatro de tal número elevado a la octava.

¿Cuál es el número? .....

¿Por qué? .....

.....

EJERCICIO N° 2

$x \neq 1$
$x \neq -1$

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2-1} + \frac{1}{x^3-x} = 0$

b) $\frac{1}{x^2+x} - \frac{x-3}{x^3-2x^2+x} = \frac{2}{x^2-1}$

EJERCICIO N° 3

Sea α la raíz de la ecuación: $2^{\log(2\alpha+1) - \log(\alpha+1)} = 1$

Marque una cruz para indicar cuál de las siguientes condiciones cumple α :

a) $-1 < \alpha < 0$ ☐
b) $\alpha < -1$ ☐
c) $\alpha > 0$ ☐
d) $\alpha = -1$ ☐

EJERCICIO N° 4

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = ax^2 + 2x - b$, $f(2) = \frac{7}{3}$ y $f(-1) = -\frac{14}{3}$

Marque con una cruz la afirmación que resulte verdadera:

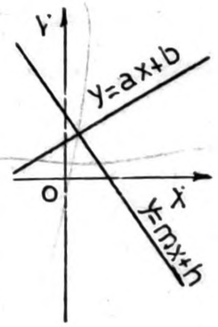
a) a y b son números opuestos ..... ☐
b) a y b resultan iguales ..... ☐
c) a y b son números recíprocos ..... ☒
d) a es el recíproco del opuesto de b ..... ☐

EJERCICIO N° 5

Marque con una cruz la gráfica que pueda corresponder al siguiente sistema:

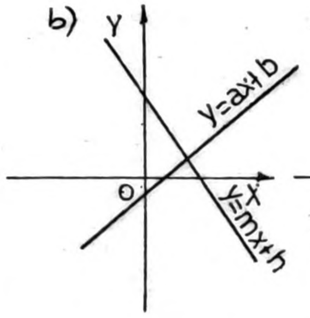
$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = mx + h \end{cases} \quad \text{con} \quad a>0; \quad b<0; \quad m<0; \quad h>0.$$

a)



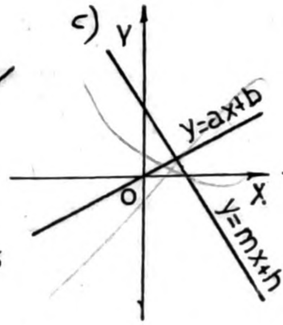
☐

b)



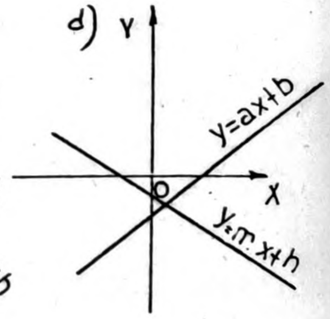
☒

c)



☐

d)



☐

EJERCICIO N° 6

Obtenga una fórmula de una función de segundo grado cuya gráfica resulte una parábola tangente al eje de abscisas en el punto (4; 0) y que intersecte al eje de ordenadas en el punto (0; 2)

Fórmula: .....

EJERCICIO N° 7

Responda la siguiente interrogación tachando SI o NO según corresponda.
¿Considera usted que los planos de ecuaciones:

$$x + 2y - z + 1 = 0 \; ; \quad -3x + y + 4z - 2 = 0 \quad \text{y} \quad -x + 5y + 2z = 0$$

constituyen un haz de planos? [SI] [NO]

¿Por que? .....

EJERCICIO N° 8

Lea atentamente y luego responda.

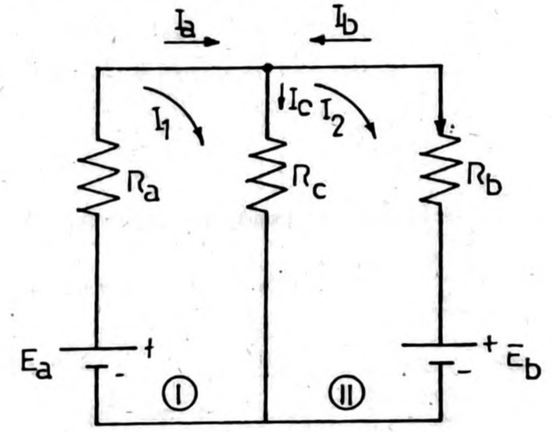
Un turista tiene una colección de 33 monedas formada por francos belgas, chelines ingleses y marcos alemanes.
En el cambio, un franco equivale a dos centavos de dolar, un chelín a 14 centavos y un marco a 25 centavos. El valor total de la colección es de 6,33 dólares. Si el número de marcos es el triple del de los chelines.

Responda ¿Cuántas monedas tiene de cada clase?

francos belgas .... chelines ingleses .... marcos alemanes ....

EJERCICIO N° 9

Dada la figura del siguiente círculo eléctrico:



y estos datos:

$E_a = 10\,V$ $\quad R_a = 4\,\Omega$ $\quad R_c = 2\,\Omega$ $\quad E_a - I_a R_a - I_c R_c = 0$

$E_b = 6\,V$ $\quad R_b = 8\,\Omega$ $\quad -E_b + I_c R_c + I_b R_b = 0$

$I_c = I_a + I_b$

Obtenga los valores de las siguientes corrientes:

I_a..... $\quad I_b$..... $\quad I_c$.....

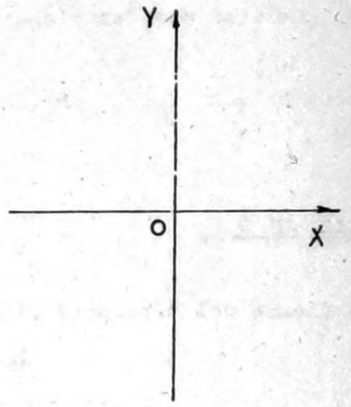
EJERCICIO N° 10

Sean las funciones

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = x^2 - 6x + 5$$
$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; g(x) = 2x - 10$$

Halle analítica y gráficamente la intersección de las curvas que corresponden a estas funciones.

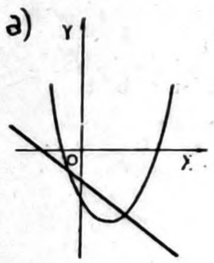
Analíticamente **Gráficamente**



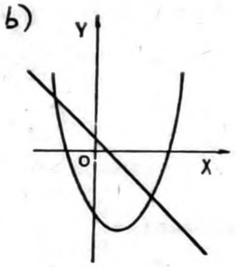
EJERCICIO N° 11

Marque con una cruz la gráfica que pueda correponder al siguiente sistema

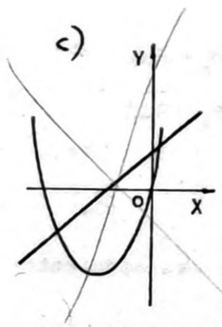
$$\begin{cases} y = mx + h \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \quad \text{con} \quad m<0;\ \ h>0;\ \ a>0;\ \ b\neq 0;\ \ c<0.$$

a) 

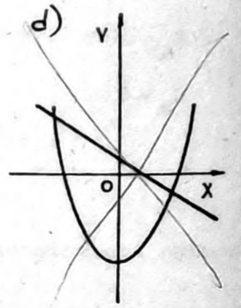
[ ]

b) 

[X]

c) 

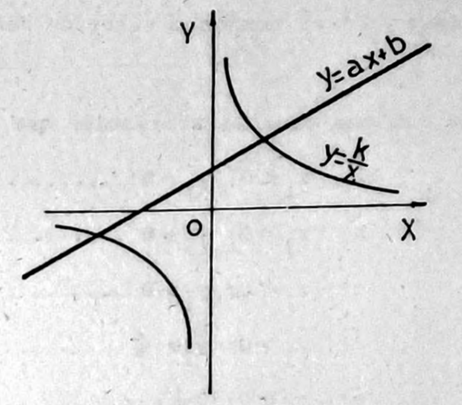
[ ]

d) 

[ ]

EJERCICIO N° 12

Dada la siguiente gráfica:



y este sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{k}{x} \\ y = ax + b \end{cases}$

Marque con una cruz las condiciones que deben cumplir los números k, a y b para que la gráfica dada pueda representar al sistema expresado.

a) k=1; a>0; b=0 ..... [ ]
b) k=1; a>0; b<0 ..... [ ]
c) k>0; a>0; b=0 ..... [ ]
d) k>0; a>0; b>0 ..... [X]

EJERCICIO N° 13

Dado el sistema: $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx^2 + nx + p \end{cases}$ con $a>0;\ \ b=0;\ \ c<0;\ \ m<0;\ \ n\neq 0;\ \ p>0$

Marque con una cruz la afirmación que resulte verdadera.

a) S es compatible determinado ..... [X]
b) S es compatible indeterminado ..... [ ]
c) S es incompatible ..... [ ]
d) Faltan datos para decidir qué opción es verdadera ..... [ ]

EJERCICIO N° 14

Sea $\{(x_1 ; y_1)\}$ el conjunto solución del sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x^3 + \log_2 y = 0 \end{cases}$

Marque con una cruz la afirmación que podría resultar verdadera.

a) $x_1 < 0$; $y_1 = 0$ ..... ☐

b) $x_1 = 0$; $y_1 > 0$ ..... ☐

c) $x_1 < 0$; $y_1 > 0$ ..... ☐

d) $x_1 > 0$; $y_1 > 1$ ..... ☐

e) $x_1 > 0$; $0 < y_1 < 1$ ..... ☒

f) $x_1 = 1$; $y_1 = 1$ ..... ☐

EJERCICIO N° 15

Lea atentamente y luego responda:

1° PARTE

Por medio de una bomba se desagota un tanque de agua en 5 hs y otra bomba lo haría en 3 hs.

¿En cuántas horas desagotarían el tanque funcionando las dos simultáneamente?

..... horas

2° PARTE

Un tanque de agua se desagota por medio de dos bombas en 1 h 52 min 30 seg. La primera bomba sola puede desagotar al tanque dos horas antes que la segunda bomba sola.

¿En cuántas horas cada una de las bombas por separado puede desagotar el tanque?

En ..... horas y en .....horas

RESPUESTAS DE LA EJERCITACION DE UNIDAD IV: ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES.

EJERCICIO N° 1 (Pág. 251)

	Raíz de la ecuación			
a)		x	x	x
b)			x	x
c)				x

EJERCICIO N° 2 (Pág. 251)

	ECUACION	CONJUNTO SOLUCION
a)		$S = \{\frac{7}{5}\}$
b)		$S = \{-\frac{1}{2}, -1\}$
c)		$S = \emptyset$
d)		$S = \{-1, 1, 2\}$

EJERCICIO N° 3 (Pág. 252)

a) $5(x - \frac{7}{5}) = 0$

b) $2(x + \frac{1}{2})(x + 1) = 0$

c) ————

d) $(x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0$

EJERCICIO N° 4 (Pág. 252)

$$a_n (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n) = 0$$

EJERCICIO N° 5 (Pág. 252)

$k = 5$

EJERCICIO N° 6 (Pág. 252)

a) $k = 5$

b) -2 raíz de $3x^2 + kx - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(-2)^2 + k(-2) - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 5$

EJERCICIO N° 7 (Pág. 252)

diagonal : 9 cm

EJERCICIO N° 8 (Päg. 253)

$I = \frac{1}{2}$ ¿Por qué se descarta el valor $-\frac{1}{2}$?

¿Tiene la respuesta?

EJERCICIO N 9 (Pág. 253)

a) [t = 1 s] pues: $2 = 4t - 2t^2 \Rightarrow t = 1$ s

b) [ ] pues: $8 = 4t - 2t^2 \Rightarrow t \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

EJERCICIO N° 10 (Pág. 253)

12
.....

EJERCICIO N° 11 (Pág. 254)

a) [ ]

b) [ ]

c) [X]

d) [ ]

EJERCICIO N° 12 (Pág. 254)

a) $h = -k + \frac{3}{8}$ $k = -h + \frac{3}{8}$

b) [Infinitas]

c) Si P(x) es divisible por x-2 $\Rightarrow$ P(2) = 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow 8h + 8k - 3 = 0$ que es una ecuación de primer grado con dos variables.

d) $h=0$ y $k=\frac{3}{8}$; $h=\frac{1}{8}$ y $k=\frac{1}{4}$; $h=1$ y $k=-\frac{5}{8}$

o bien: $(0; \frac{3}{8})$; $(\frac{1}{8}; \frac{1}{4})$; $(1; -\frac{5}{8})$

EJERCICIO N° 13 (Pág. 254)

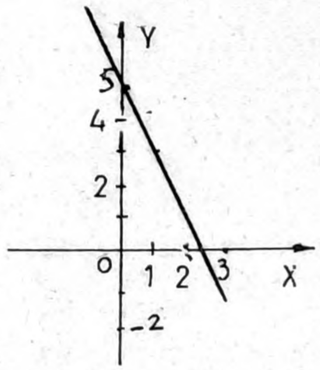
1° PARTE

Puede ser: $y = 3x - 1$ o cualquier ecuación equivalente.

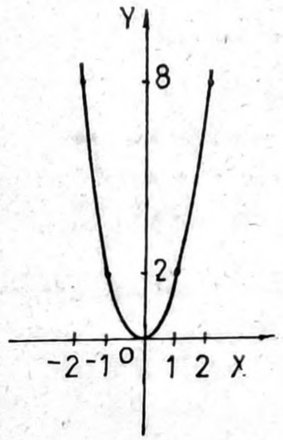
2° PARTE

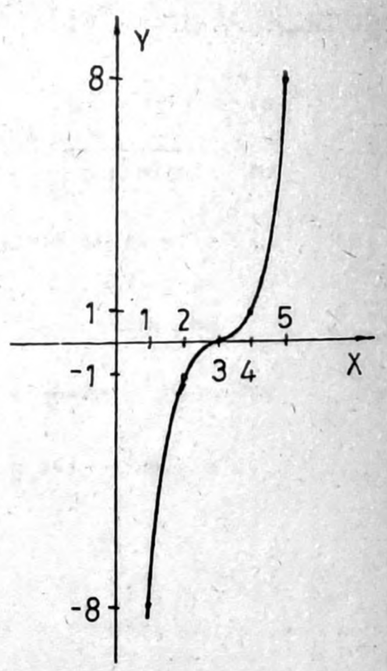
a) Puede ser: $y = -2x + 5$ o cualquier ecuación equivalente.

b)



EJERCICIO N° 14 (Pág. 255)





EJERCICIO N° 15 (Pág. 258)

a) $S = \{0\}$

b) $S = \{\frac{15}{2}\}$ ¡Atención!: x=3 no satisface la ecuación dada.

EJERCICIO N° 16 (Pág. 258)

No existe tal número natural.

EJERCICIO N° 17 (Pág. 264)

a) $S = \{3\}$

b) $S = \{2, \frac{\log 28}{\log 2}\}$

c) $S = \{9\}$

d) $S = \{-2, 2\}$

e) $S = \{-2\}$

f) $S = \{45°, 135°, 225°, 315°\}$

g) $S = \{\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4}\}$

h) $S = \{\frac{\pi}{2}\}$

i) $S = \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, 5\frac{\pi}{3}\}$

EJERCICIO N° 18 (Pág. 281)

$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ o cualquier otro sistema equivalente.

EJERCICIO N° 19 (Pág. 281)

$k \neq 20$ o bien $k \in \mathbb{R} - \{20\}$

EJERCICIO N° 13 (Pág. 254)

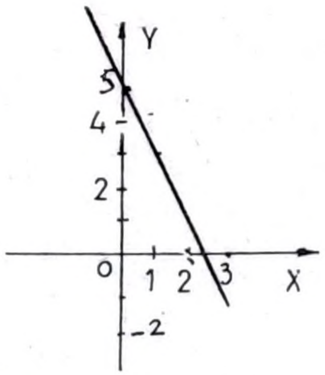
1° PARTE

Puede ser: $y = 3x - 1$ o cualquier ecuación equivalente.

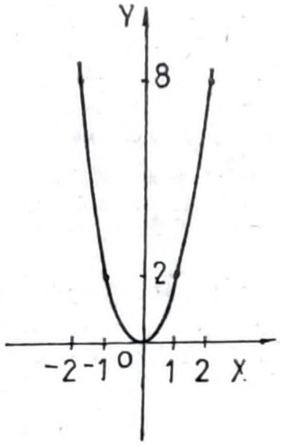
2° PARTE

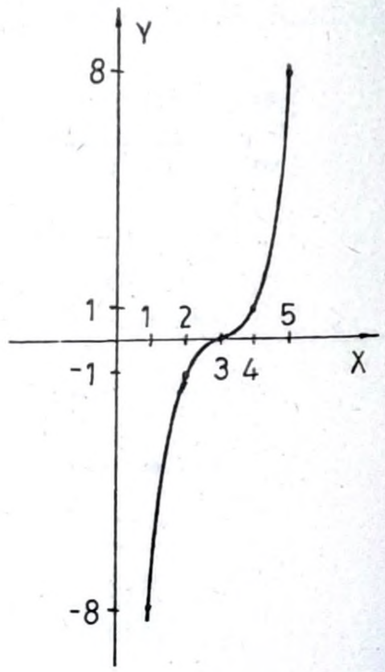
a) Puede ser: $y = -2x + 5$ o cualquier ecuación equivalente.

b)



~~EJERCICIO~~ N° 14 (Pág. 255)





EJERCICIO N° 15 (Pág. 258)

a) $S = \{0\}$

b) $S = \{\frac{15}{2}\}$ ¡Atención!: x=3 no satisface la ecuación dada.

EJERCICIO N° 16 (Pág. 258)

No existe tal número natural.

EJERCICIO N° 17 (Pág. 264)

a) $S = \{3\}$

b) $S = \{2, \frac{\log 28}{\log 2}\}$

c) $S = \{9\}$

d) $S = \{-2, 2\}$

e) $S = \{-2\}$

f) $S = \{45°, 135°, 225°, 315°\}$

g) $S = \{\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}, 7\frac{\pi}{4}\}$

h) $S = \{\frac{\pi}{2}\}$

i) $S = \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, 5\frac{\pi}{3}\}$

EJERCICIO N° 18 (Pág. 281)

$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ o cualquier otro sistema equivalente.

EJERCICIO N° 19 (Pág. 281)

$k \neq 20$ o bien $k \in \mathbb{R} - \{20\}$

EJERCICIO N° 20 (Pág. 282)

a) [X] b) [ ] c) [X] d) [ ]

Pues en el segundo y en el cuarto cuadrantes, los puntos tienen coordenadas con signos contrarios.

EJERCICIO N° 21 (Pág. 282)

a) [ ] b) [ ] c) [X] d) [X]

EJERCICIO N° 22 (Pág. 283)

1° PARTE

¿La situación que usted ha ideado lo debe llevar al planteo del sistema siguiente: $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 9x = -1 \end{cases}$

2° PARTE

$$S = \{(-\frac{1}{9}; -\frac{16}{3})\}$$

3° PARTE

En efecto: $\begin{cases} 3(\frac{1}{9}) - (-\frac{16}{3}) = 5 \\ 9(-\frac{1}{9}) = -1 \end{cases}$

EJERCICIO N° 23 (Pág. 283)

cobre: $\frac{15}{2}$ Kg estaño: $\frac{25}{2}$ Kg

EJERCICIO N° 24 (Pág. 284)

$a = -\frac{2}{3}$ $b = 0$ $c = \frac{8}{3}$

EJERCICIO N° 25 (Pág. 284)

1 Kg de aleta cuesta 40 F.

1 Kg de espinas cuesta 50 F.

EJERCICIO N° 26 (Pág. 288)

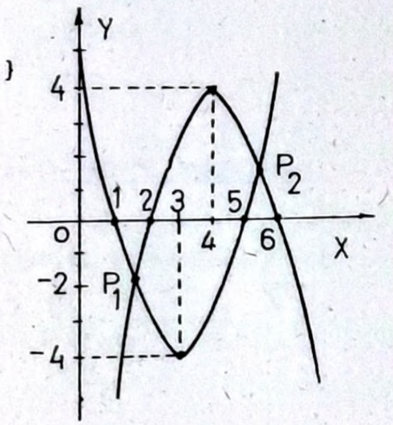
Analíticamente

a) $S = \{(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{15}); (\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{15})\}$

o bien $P_1 = (\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{15})$ y

$P_2 = (\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{15})$

Gráficamente

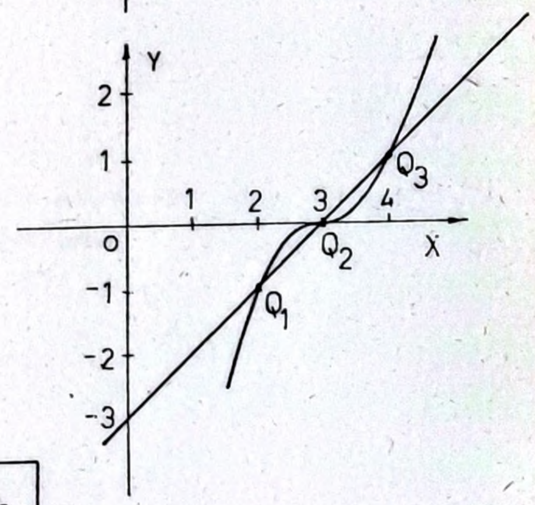


b) $S = \{(2; -1), (3; 0), (4; 1)\}$

o bien $Q_1 = (2; -1)$,

$Q_2 = (3; 0)$ y

$Q_3 = (4; 1)$



EJERCICIO N° 27 (Pág. 289)

a) [$R_3 = 18\,R_4$] [$R_4 = \frac{1}{18}R_3$]

b) [Infinitas] pues es una ecuación de primer grado con dos variables.

c) [$R_3 = 36000\,\Omega$ y $R_4 = 2000\,\Omega$] [$R_3 = 18\,\Omega$ y $R_4 = 1\,\Omega$]

d) [$R_4 = 1000\,\Omega$]

EJERCICIO N° 28 (Pág. 289)

a) 16 clientes

b) 22 días.

EJERCICIO N° 29 (Pág. 293)

a) $S = (1; 7)$

b) $S = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

c) $S = (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$

RESPUESTAS DEL TRABAJO PRACTICO DE UNIDAD IV:

ECUACIONES SISTEMAS DE ECUACIONES.

EJERCICIO N° 1 (pág 294)

1° PARTE

$n = 4$ pues $\frac{(4+1)^2 - 10}{3} = 5$

2° PARTE

No existe tal número par, pues ningún número par x, satisface la ecuación:

$$3x + \frac{1}{x+1} = -x$$

3° PARTE

El número es $\frac{1}{2}$ pues $\log_2 (\frac{1}{2})^3 - 1 = \log_4 (\frac{1}{2})^8$

Usted se estará preguntando: ¿por qué fueron descartados los demás números que seguramente obtuvo al trabajar este ejercicio?

¿Tiene la respuesta? .....

EJERCICIO N° 2 (pág 295)

a) $S = \emptyset$ ¿por qué se descarta el número cero?

b) $S = \{2\}$ ¿por qué se descarta el número -1?

EJERCICIO N° 3 (pág 295)

a) ☐
b) ☐
c) ☐
d) ☐

No satisface ninguna de las condiciones presentadas.

EJERCICIO N° 4 (pág 295)

a) ☐
b) ☐
c) X
d) ☐

EJERCICIO N° 5 (pág 296)

a) ☐ b) X c) ☐ d) ☐

EJERCICIO N° 6 (pág 296)

$y = \frac{1}{8}x^2 - x + 2$ o cualquiera equivalente a ella.

EJERCICIO N° 7 (pág 296)

SI ☒ NO porque el sistema formado por las ecuaciones de los planos, es compatible indeterminado y los planos no son coincidentes.

EJERCICIO N° 8 (pág 297)

francos belgas: 5 chelines ingleses: 7 marcos alemanes: 21

EJERCICIO N° 9 (pág 297)

$I_a = \frac{11}{7}$ $I_b = \frac{2}{7}$ $I_c = \frac{13}{7}$

EJERCICIO N° 10 (pág 298)

Analíticamente

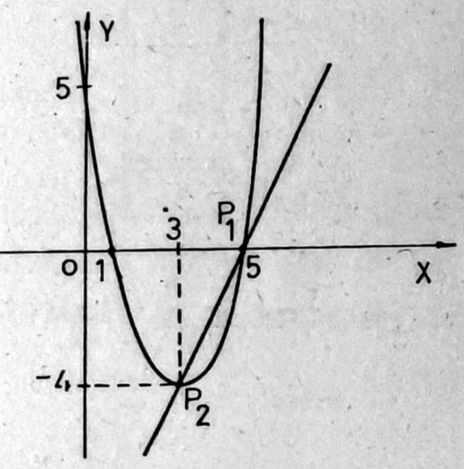
a) $S = \{(5;0), (3;-4)\}$

o bien

$P_1 = (5;0)$ y

$P_2 = (3;-4)$

Gráficamente



EJERCICIO N° 11 (pág 298)

a) ☐ b) X c) ☐ d) ☐

EJERCICIO N° 12 (pág 299)

a) ☐
b) ☐
c) ☐
d) X

EJERCICIO N° 13 (pág 299)

a) [X]
b) [ ]
c) [ ]
d) [ ]

EJERCICIO N° 14 (pág 300)

a) [ ]
b) [ ]
c) [ ]
d) [ ]
e) [X]
f) [ ]

EJERCICIO N° 15 (pág 300)

1° PARTE

$1\frac{7}{8}$ horas

2° PARTE

5 horas y 3 horas.

UNIDAD V

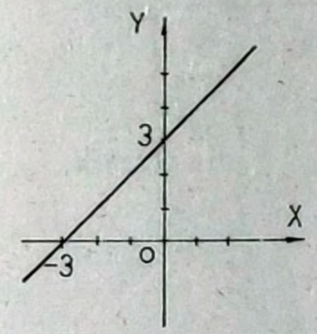
LIMITE. DERIVADA. INTEGRAL

Límite Finito para la Variable Tendiendo a un Valor Finito

sideremos el siguiente ejemplo de función:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = x+3$$

encemos por trazar la gráfica que corresponde a la misma, porque nos de ayudar a desarrollar este tema.



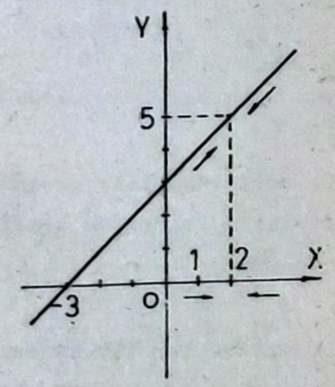
Le proponemos la siguiente actividad:

1) Confeccione una tabla de valores con tres columnas.
   En la primera columna escriba valores de x que se aproximen cada vez más a x=2, por su izquierda.
   Por ejemplo: 1 ; 1,6 ; 1,9 ; 1,99 ; ...
   En la segunda columna escriba sus respectivas imágenes.
   Deje pendiente la tercera columna, ya que luego la utilizará.

2) Confeccione una tabla similar a la anterior asignándole a x valores cada vez más próximos a x=2, pero por su derecha.
   Por ejemplo: 3 ; 2,5 ; 2,2 ; 2,001 ; ...

3) ¿Cuál es, en ambos casos, el único valor al cual tiende la función cuando x tiende a 2?

Hagamos un paréntesis en la actividad para cotejar sus respuestas con las nuestras:



1)

x	f(x)
1	4
1,6	4,6
1,9	4,9
1,99	4,99
...	...

2)

x	f(x)
3	6
2,5	5,5
2,2	5,2
2,001	5,001
...	...

3) La función tiende a 5.

Cuando se cumplen las condiciones anteriores, o sea, cuando la variable independiente **x tiende a dos** (se simboliza: $x \to 2$) por izquierda y por derecha, se dice que **la función tiende a un único valor: cinco** (se simboliza: $f(x) \to 5$) o bien se dice que **el límite de la función es cinco.** Se simboliza:

$$\lim_{x \to 2} (x+3) = 5$$

¿Cómo asegurar que cuando $x \to 2$ la función $f(x) \to 5$?

Para contestar esta pregunta y luego hacer una primera aproximación a la definición formal de límite, le sugerimos continuar con la actividad propuesta:

4) Complete las tablas anteriores de los puntos 1) y 2) escribiendo en las terceras columnas la diferencia, en valor absoluto, entre cada imagen obtenida y el número propuesto en el punto 3).

Controle, por favor:

4)

x	f(x)	|f(x)-5|
1	4	|4-5| = 1
1,6	4,6	|4,6-5| = 0,4
1,9	4,9	|4,9-5| = 0,1
1,99	4,99	|4,99 - 5| = 0,01
...	...	...

x	f(x)	|f(x) - 5|
3	6	|6-5| = 1
2,5	5,5	|5,5-5| = 0,5
2,2	5,2	|5,2-5| = 0,2
2,001	5,001	|5,001-5| = 0,001
...	...	...

5) Piense ahora **un número cualquiera positivo muy pequeño**, al que simbolizará con ε y luego en cada tabla agregue por lo menos un valor de x tal que: $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Le sugerimos, por ejemplo: $\varepsilon = 0{,}0001$.

¿Completó su trabajo?

Si su respuesta es sí, ¡adelante!, de lo contrario insista.

Recuerde que:

"Perder la paciencia es perder la batalla".

Gandhi

Nosotros podríamos agregar en las tablas:

x	f(x)	|f(x) - 5|
1	4	|4-5| = 1
1,6	4,6	|4,6-5| = 0,4
1,9	4,9	|4,9-5| = 0,1
1,99	4,99	|4,99-5| = 0,01
1,99999	**4,99999**	**|4,99999 - 5| = 0,00001 < ε**

x	f(x)	|f(x)-5|
3	6	|6-5| = 1
2,5	5,5	|5,5-5| = 0,5
2,2	5,2	|5,2-5| = 0,2
2,001	5,001	|5,001 - 5| = 0,001
2,000001	**5,000001**	**|5,000001 - 5| = 0,000001 < ε**

Observe que por más pequeño que sea un número positivo ε, siempre va a existir un número positivo δ siendo $0 < |x-2| < \delta$, tal que la diferencia entre la imagen de ese x y 5 sea en valor absoluto, menor que ε.

Luego podemos afirmar que el $\lim_{x\to 2}(x+3) = 5$ si y sólo si se cumple la observación anterior.

Se simboliza:

$$\lim_{x\to 2}(x+3) = 5 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-5| < \varepsilon$$

En general de cimos:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

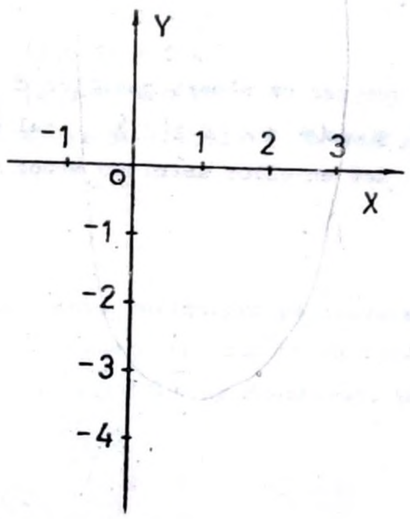
Así, hemos arribado a la definición de límite.

¿En algún momento nos interesó si existía o no f(2)? Y en caso de existir, ¿Fue necesario conocer este valor?

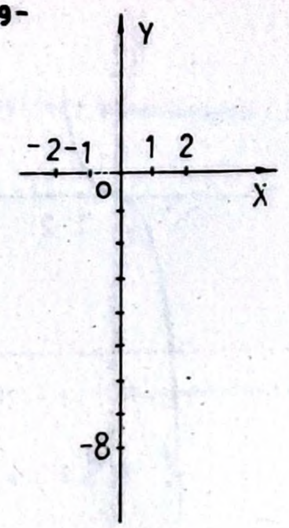
En efecto, No pues nos interesa el comportamiento de la función en las proximidades de x=2 y no en x=2.

¿Se anima a calcular los siguientes límites, trazando previamente las gráficas correspondientes a las funciones?

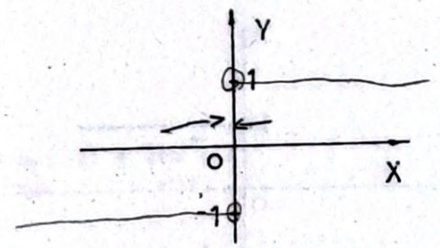
1) $\lim_{x\to 1}(x^2 - 2x - 3) =$ ..... -4



2) $\lim_{x\to -2} \frac{x^4 + 2x^3}{x+2} =$ .....

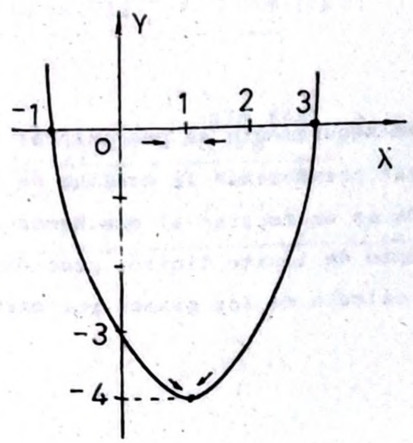


3) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$ .....

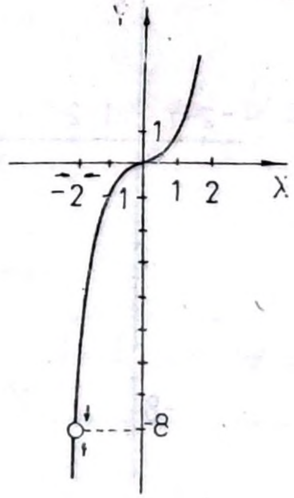


Esperamos que sus respuestas coincidan con las nuestras:

1) $\lim_{x\to 1}(x^2 - 2x - 3) = -$

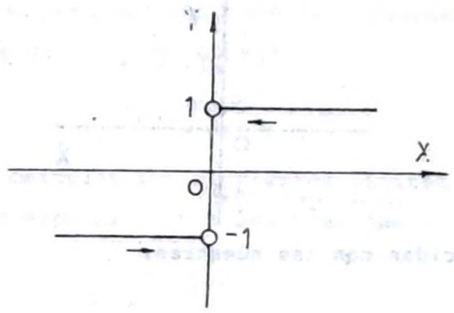


2)



$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3(x+2)}{x+2} = -8$$

3)



$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ = no existe pues cuando x tiende a cero la función **no tiende a un único valor**, pues por la izquierda tiende a -1 (este valor se denomina límite lateral por la izquierda) y por la derecha, tiende a 1 (este valor se denomina límite lateral por la derecha).

A esta altura del desarrollo usted seguramente se preguntará: ¿cómo calcular un límite sin trazar previamente la gráfica de la función? Obviamente, el trazado de la curva es un recurso al que hemos apelado para que usted comprenda el concepto de límite finito, pero desde ya le aseguramos que puede efectuar el cálculo de los mismos por otros caminos.

Para ello le proporcionamos **algunas reglas y propiedades de los límites finitos:**

1) El límite de una constante es igual a dicha constante.
Se simboliza:

$$\lim_{x \to a} k = k \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

Análogamente:

2) $\lim_{x \to a} x = a$

3) $\lim_{x \to a} kx = k \lim_{x \to a} x$

4) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

5) $\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x)$

6) $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$

7) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Ahora le pedimos que retome el primer ejemplo propuesto y que aplique paso por paso las propiedades correspondientes.

$\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x - 3) =$

Confronte sus resultados con los siguientes:

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x - 3) = \lim_{x \to 1} x^2 - \lim_{x \to 1} 2x - \lim_{x \to 1} 3$$

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x - 3) = \underbrace{[\lim_{x \to 1} x]^2}_{1} - 2 \underbrace{\lim_{x \to 1} x}_{1} - \underbrace{\lim_{x \to 1} 3}_{3}$$

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x - 3) = 1^2 - 2.1 - 3$$

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x - 3) = -4$$

En la práctica, estos cálculos se hacen mentalmente.

¿Y si se presentan casos como los siguientes?

1) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{x - \frac{\pi}{2}}$ etc.

¡No se asuste! Estas y muchas otras situaciones análogas serán tratadas en el Curso de Análisis Matemático I.

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página n° 386).

EJERCICIO N° 1

Calcule los siguientes límites. Si en algún caso éste no existiera, fundamente su respuesta.

a) $\lim_{z \to 0} (z^2 - 3)(z + 1) =$

b) $\lim_{x \to 8} \frac{x^2}{x - 7} =$

c) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} ent(x) = 0$

d) $\lim_{x \to 1} ent(x) =$

DERIVADA

Nuestra pregunta inicial es:

¿Qué se entiende por pendiente de una curva en uno de sus puntos?

Para responderla le pedimos un poquito de tiempo para desarrollar previamente, algunos temas.

Así, comenzamos con el concepto de función continua en un punto x=a de su dominio.
¿Cuándo una función f es continua en un punto x=a de su dominio?
Pues bien, ello ocurre cuando se verifica la siguiente igualdad:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ siendo el límite, finito

Ya le hemos dado la definición y por lo tanto, usted está en condiciones de realizar la siguiente actividad:

Complete el presente cuadro, según corresponda:

	FUNCION	$\lim_{x \to 0} f(x)$	f(0)	¿continua en x=0?
a)	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^3 + 2x$	0	0	Si
b)	$f: \mathbb{R} - \{0, 3\} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x} \frac{*1}{x(x-3)}$	$-\frac{1}{3}$	∄	NO
c)	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \lvert x \rvert$	0	0	Si
d)	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x): \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$	1	-2	NO
e)	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x): \begin{cases} 4 & \text{si } x \in (0;+\infty) \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x \in (-\infty;0) \end{cases}$	∄	3	NO
f)	$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} / f(x): \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0;+\infty) \\ -1 & \text{si } x \in (-\infty;0) \end{cases}$	∄	∄	NO

Le sugerimos controlar sus respuestas con las nuestras:

	FUNCION	$\lim_{x \to 0} f(x)$	f(0)	¿cont. en x=0?
a)		0	0	Si
b)		$-\frac{1}{3}$	∄	No
c)		0	0	Si
d)		1	-2	No
e)		∄	3	No
f)		∄	∄	No

Nota: Se dice que una función es continua en un intervalo cuando lo es en todos los puntos de dicho intervalo.

En efecto, los respectivos incrementos son cada vez menores, es decir, el incremento Δx tiende a cero ($\Delta x \to 0$) y la recta secante PP_1 tiende a transformarse en la recta tangente a la curva en P. Se dice que en el límite, la recta es tangente a la curva en P.

¿Cuál es la pendiente de la recta secante PP_1?

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Así es: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (que se denomina cociente incremental)

También puede anotarse: $\overbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}^{\Delta y}$

$$f'(x) \lim_{\Delta x \to 0}$$

Observe que cuando P_1 se aproxima a P, o sea, cuando Δx tiende a cero ($\Delta x \to 0$), las pendientes de las nuevas rectas están mucho más cerca de la pendiente de la recta tangente a la curva en P, de lo que estaba la pendiente de PP_1.

Se dice que la pendiente de la curva en P es el límite (si existe) de la pendiente de la recta PP_1 cuando P_1 se aproxima sobre la curva a P (o sea: $\Delta x \to 0$).

Tal límite se denomina **derivada** de la función en el punto P.

En símbolos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

O bien:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

La derivada de una función cuya fórmula es $y = f(x)$, puede simbolizarse de diferentes maneras, por ejemplo:

$$f'(x) \; ; \; y' \; ; \; \frac{dy}{dx} \quad \text{etc.}$$

siendo por definición $dx = \Delta x$ y $dy = f'(x)\,dx$

dx se lee: diferencial de x o diferencial de la variable independiente.

dy se lee: diferencial de y o diferencial de la variable dependiente.

Supongamos que queremos calcular la pendiente de la curva correspondiente a la función:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; / \; f(x) = x^3$$

en un punto cualquiera de su dominio, por ejemplo en x=2.

Por definición, resulta que dicha pendiente es:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

Resolviendo:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^3 - 2^3}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3 - 8}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(12 + 6\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} (12 + 6\Delta x + \Delta x^2)$$

$$\boxed{f'(2) = 12}$$

Luego, la pendiente de la curva en x=2 es 12.

Y ¿Cómo podemos generalizar este planteo?, es decir, ¿Cómo podemos hacer para conocer la pendiente de la curva en cualquier punto de su dominio?

Muy fácilmente, ya no consideraremos un punto particular de su dominio, sino un punto x cualquiera del mismo.

Procedemos en forma similar a lo ya hecho, es decir, aplicamos la definición ya vista:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Resolviendo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2}$$

Tenemos, entonces, que esta expresión nos permite calcular la pendiente de la curva en cualquiera de sus puntos.

Nos puede decir, ¿cuál es la pendiente de la curva en x=-1? y ¿en x=0?

.....

.....

En efecto, tales pendientes son 3 y 0 respectivamente, pues:

$$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$$

$$f'(0) = 3.0^2 = 0$$

¿Se anima a deducir la pendiente de la curva correspondiente a:

1) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; g(x) = x + 3$

en cualquiera de sus puntos?

¿Y la de $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; h(x) = x^2$? ¡Hágalo!

1) .....

.....

.....

.....

.....

2) .....

.....

.....

.....

.....

Coteje sus respuestas con las nuestras:

$g'(x) = 1$ $\qquad$ $h'(x) = 2x$

En estos momentos del desarrollo usted se preguntará: ¿por qué hemos impuesto la condición de que la función sea continua en un punto x=a de su dominio, para llegar al concepto de pendiente en dicho punto?

Para que usted mismo responda a esta pregunta, le proponemos calcular la derivada de:

$f: \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = x^2$ $\qquad$ en x=1

.....

.....

.....

.....

Suponemos que su respuesta es como la que sigue: tal derivada no existe pues en x=1 la función no es contínua ya que $\nexists$ f(1) pues 1 no pertenece al dominio de la función.

En símbolos:

$$\nexists\ f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \quad \nexists$$

En cualquier otro punto, ¿esta funcion es derivable?

.....

.....

En efecto, tal derivada existe y usted ya dedujo que es: $f'(x) = 2x$

Llegamos así a la siguiente conclusión:

> **Si una función no es continua en un punto x=a de su dominio, no es derivable en el mismo.**

Y ¿todas las funciones continuas son derivables?

.....

.....

.....

.....

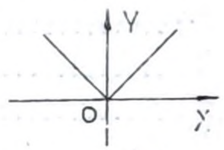
Para ayudarle a responder esta pregunta, le proponemos estudiar la derivabilidad de la función valor absoluto en x=0.

.....

.....

.....

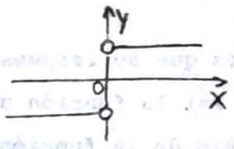
Coteje su trabajo con el nuestro:



$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Si $\Delta x \to 0$ por la derecha la derivada es 1.

Si $\Delta x \to 0$ por la izquierda la derivada es -1.

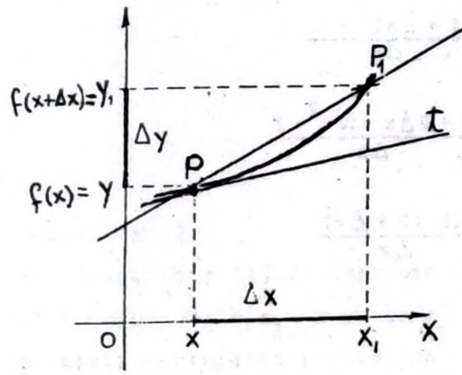


Como estos valores no son iguales, el límite no existe y por consiguiente la función no es derivable en x=0, a pesar de ser continua.

De esta manera, podemos concluir que:

> **Para que una función sea derivable en un punto, es condición necesaria aunque no suficiente que sea continua en dicho punto.**

Recordemos el concepto fundamental de este segundo tramo, o sea, el concepto de derivada de una función.



Se dice que la **pendiente de la curva en P** es el límite (si existe) de la pendiente de la recta PP_1 cuando P_1 se aproxima sobre la curva a P (o sea, cuando $\Delta x \to 0$).

Tal límite se denomina derivada de la función en el punto P.

En símbolos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

O bien:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

¿Le gustaría ver algunas aplicaciones de este concepto?

Ejemplo N° 1

Sea la función

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; h(x) = (x-1)^2$$

Halle la ecuación de la recta tangente a la curva que corresponde a la función dada, en el punto de abscisa x=2.

Grafique la parábola y la recta.

Sabemos que para hallar la ecuación de una recta es suficiente conocer uno de sus puntos, que en nuestro caso es obviamente por comodidad: P = (2; h(2)), o sea P = (2; 1), y la pendiente de la recta. Tal pendiente es la de la parábola en x=2, o sea:

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x-1)^2 - (2-1)^2}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 - 1}{\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(2+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(2) = 2$$

Luego la ecuación de la recta tangente t podría obtenerse de la siguiente manera:

$$y = mx + b$$

o bien

$$y = f'(x)x + b \qquad (*)$$

Como P = (2; 1) $\in$ t y f'(2) = 2, reemplazando en (*), resulta:

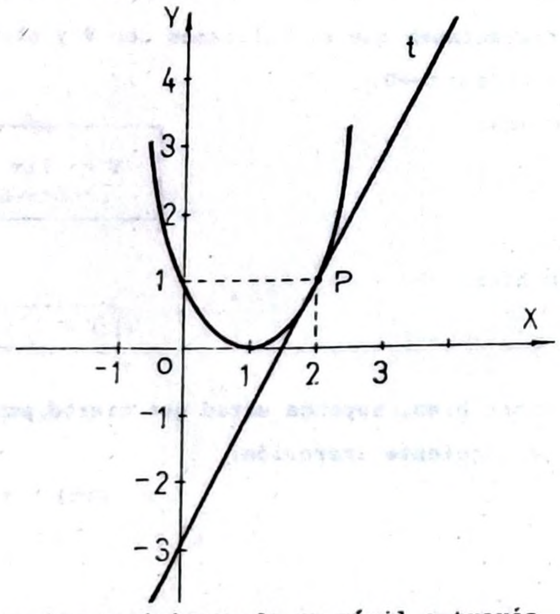
$$1 = 2.2 + b \implies b = -3$$

Luego, si en (*) consideramos: f'(x) = 2 y b = -3, se tiene:

$$y = 2x - 3$$

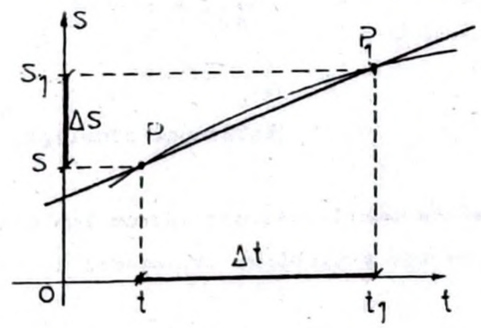
que es una forma de la ecuación pedida.

Con respecto a las gráficas veamos que sucede:



Ejemplo N° 2:

En la siguiente figura representamos las posiciones de un móvil a través del tiempo: $\Delta s = s_1 - s$, en el intervalo de tiempo: $\Delta t = t_1 - t$, según un cierto movimiento rectilíneo uniformemente variado.



Sabemos que la pendiente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ de la recta secante PP_1 determina la velocidad escalar media pues Δs representa el desplazamiento producido y Δt representa al intervalo de tiempo correspondiente.
O sea:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Como la velocidad escalar media no nos proporciona información con respecto al comportamiento del móvil en cada uno de los instantes del intervalo considerado, es muy conveniente definir un concepto que responda a esta necesidad.

Tal concepto es el que corresponde a la denominada **velocidad escalar instantánea** que simbolizamos con **V** y obviamente se obtiene en el límite cuando $\Delta t \to 0$.

O sea:

$$\boxed{V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

O bien:

$$\boxed{V = s'(t)}$$

Ahora bien, suponga usted que cierto punto material se mueve determinando la siguiente expresión:

$$S(t) = t^2 + 4$$

S en metros: m

t en segundos: s

Nos puede decir ¿cuál es la velocidad escalar instantántea en t=8? y ¿en t=1?

Coteje su respuesta con la nuestra:

Como

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

O bien

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

resulta

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^2 + 4 - (t^2 + 4)}{\Delta t}$$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t)$$

$$V = 2t \qquad o \qquad s'(t) = 2t$$

Luego: $V(8) = 2.8 \frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{V(8) = 16 \frac{m}{s}}$

y $V(1) = 2.1 \frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{V(1) = 2 \frac{m}{s}}$

Le planteamos la siguiente inquietud:

¿Por qué en el caso del movimiento rectilíneo uniforme la velocidad escalar instantánea es constante, cualquiera sea el valor de t?

Tenga presente que en este tramo, nuestros objetivos son que usted comprenda y aplique el concepto de derivada.

Con respecto al cálculo de las derivadas de las distintas funciones puede hacerse como hasta el momento, aplicando la definición, aunque a veces el trabajo se torna bastante dificultoso.

Le proporcionamos a continuación una lista con derivadas de algunas funciones y operaciones:

1) La derivada de una constante es nula.

Se simboliza:

$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}$

Análogamente:

2) $f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = k\,x^{k-1} \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}$

3) $f(x) \pm g(x) \Rightarrow [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

4) $f(x).g(x) \Rightarrow [f(x).g(x)]' = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$

5) $\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow [\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

6) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

7) $f(x) = k^x \Rightarrow f'(x) = k^x.\ln k \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

8) $f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

9) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x$

... etc.

Le sugerimos como actividad, calcular todas las derivadas halladas por definición en esta parte, aplicando ahora, la tabla precedente y que verifique la igualdad de las respuestas obtenidas en cada caso.

Así en la pág. 22 tenemos una función cuya fórmula es:

$f(x) = x^3$ o bien $y = x^3$

Su derivada es.....

Otro caso, en la pág. 333, tenemos:

$h(x) = (x-1)^2$

O bien

$h(x) = x^2 - 2x + 1$

Es decir

$y = x^2 - 2x + 1$

Su derivada es .....

Coteje sus respuestas con las nuestras:

En el primer caso: $y=x^3$ aplicamos derivada de una potencia (regla n° 2).

Asi, resulta: $y' = 3x^{3-1}$

O sea $\boxed{y' = 3x^2}$

En el segundo caso: $y = x^2 - 2x + 1$ aplicando paso a paso las reglas correspondientes, se tiene:

$y' = (x^2)' - (2x)' + (1)'$

$y' = 2x - 2x' + 0$

$\boxed{y' = 2x - 2}$

En la práctica estos cálculos se hacen directamente.

Finalmente, le proponemos hallar, aplicando las reglas correspondientes, la derivada de las funciones cuyas fórmulas son:

1) $y = 3x\,(x+1)$

2) $y = \frac{x^2}{x-1}$

¿Tuvo dificultades? ¿No? pues entonces ¡adelante!

¿Sí? innista, recuerde que:

"El que no trabaja, no comete errores".

L.A.

Controle si su trabajo es análogo al nuestro:

1) $y = 3x\,(x+1)$

$y' = 3x.\underbrace{(x+1)'}_{1} + (x+1).\underbrace{(3x)'}_{3}$

$y' = 3x. \quad 1 \quad + (x+1). \quad 3$

$y' = 3x + 3x + 3$

$$\boxed{y' = 6x + 3}$$

2) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

$$y' = \frac{(x-1)(x^2)' - x^2.(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{(x-1).2x - x^2.1}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}}$$

Nota: si derivamos f' obtendremos una función que llamamos **derivada segunda de f** y se simboliza f".

Análogamente, la derivada tercera de f se obtiene al derivar f" y se simboliza f"', etc.

Le proponemos calcular las derivadas segundas de:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; g(t) = 4t^3 + 2t - 3$

3) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; h(z) = \operatorname{sen} z$

Controle su trabajo con lo que sigue.

1) $f'(x) = 4x + 3$ $\qquad$ $f''(x) = 4$

2) $g'(t) = 12t^2 + 2$ $\qquad$ $g''(t) = 24\,t$

3) $h'(z) = \cos z$ $\qquad$ $h''(z) = -\operatorname{sen} z$

Según lo visto hasta el momento, ¿podría usted completar correctamente la siguiente afirmación?

La gráfica de la derivada f' (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) de la función:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad$ (con $a > 0$ y $b < 0$)

es una ..... con concavidad hacia las ordenadas ..... y la gráfica de la derivada secunda f" (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) es una ..... con pendiente ..... y ordenada al origen ..... .

En efecto, sus respuestas son seguramente:

parábola ..... positivas .....

recta .....

positiva (6a) ..... negativa (2b) .....

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página N° 386)

EJERCICIO N° 2

1° PARTE

Obtenga, aplicando la definición, la pendiente de la curva correspondiente a la siguiente función:

$f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = \frac{1}{x}$, en cualquier punto de su dominio

$f'(x) = \frac{0.x - 1.1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

2° PARTE

La curva con la que acaba de trabajar se denomina hipérbola equilátera. Indique la pendiente de tal hipérbola en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

$f''_{\frac{1}{2}} = -4$

3° PARTE

Halle una ecuación de la recta t tangente a la hipérbola en el punto de abscisa $x = -1$.

$y = mx + b$

$m = f'(-1) = -1$

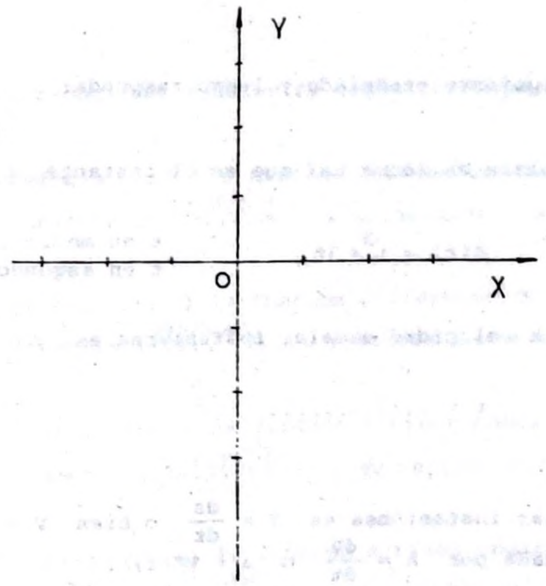
$y = -1x + b$ $\quad y = x - 2$

$-1 = (-1)(-1) + b$

$-2 = b$

4° PARTE

Represente gráficamente la hipérbola y la recta t.



EJERCICIO N° 3

Complete el siguiente cuadro aplicando reglas de derivación, sabiendo que todas las funciones están definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

	FORMULA DE LA FUNCION	DERIVADA
a)	$f(x) = 3x^4$	$f'(x) = 12x^3$
b)	$g(t) = -t^2(3t+2)$ $-3t^3-2t^2$	$g'(t) = -9t^2-4T$
c)	$h(s) = (s^2+1)(s-3)$ s^3-3s^2+s-3	$h'(s) = 3s^2-6s+1$
d)	$y = \frac{1}{x^2+1}$	$y' = \frac{x^2+1-2x}{(x^2+1)^2}$

EJERCICIO N° 4

Lea atentamente el siguiente enunciado y luego responda:

Una partícula se desplaza en forma tal que en el instante t, la posición está dada por:

$$S(t) = t^3 + 3t$$

s en metros: $m \Rightarrow [s]=m$
t en segundos: $s \Rightarrow [t]=s$

a) ¿En qué instante la velocidad escalar instantánea es $V = 12\ \frac{m}{s}$?

$t =$ .....

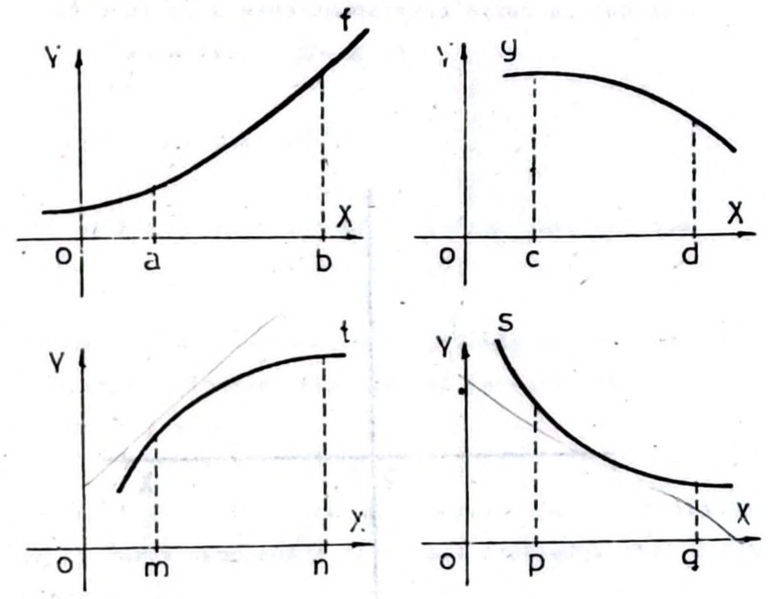
Sabiendo que:
La velocidad escalar instantánea es $V = \frac{ds}{dt}$ o bien $V = s'(t)$ y la aceleración está dada por $a = \frac{dV}{dt}$ o $a = V'(t)$.

b) ¿En qué instante la aceleración es nula?

$t =$ .....

EJERCICIO N° 5

Analice las siguientes gráficas.



Complete los enunciados siguientes según corresponda:

a) En el intervalo (a; b) la función f tiene concavidad ..+.....,
es estrictamente creciente... y su pendiente es ..+..... .

b) En el intervalo (c; d) la función g tiene concavidad ..-.....,
es estrictamente decrec..... y su pendiente es ..-..... .

c) En el intervalo (m; n) la función t tiene concavidad ..-.....,
es estrictamente .creciente... y su pendiente es ..+..... .

d) En el intervalo (p; q) la función s tiene concavidad ..+.....
es estrictamente ..decrec.... y su pendiente es ..-..... .

EJERCICIO N° 6

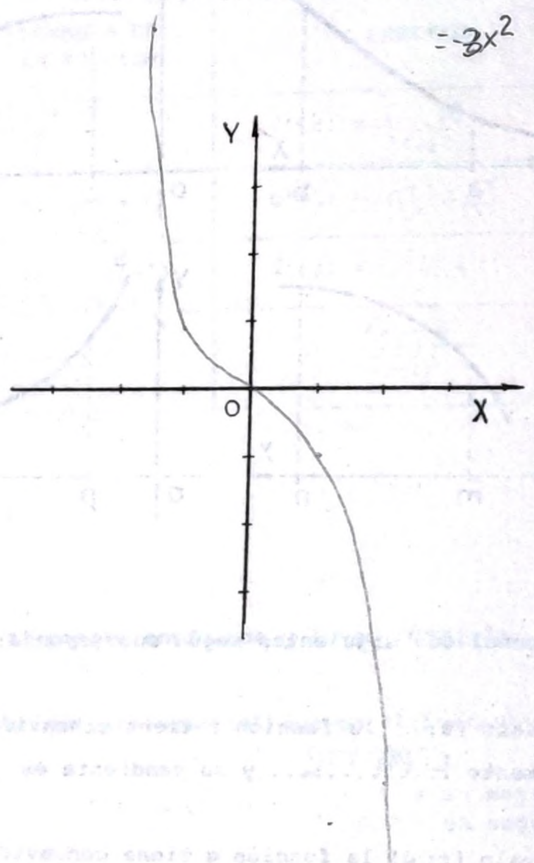
1°PARTE

Grafique la curva correspondiente a la función

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; h(x) = -x^3$

$= -3x^2$

X	Y
1	-1
2	-8
0	0
-1	1
-2	8



2° PARTE

Complete el siguiente enunciado según corresponda.

La función h es estrictamente decreciente , su derivada o pendiente es $-3x^2$ excepto en el punto de abscisa x = 0 , en el cual la derivada es 0 .

INTEGRAL. CALCULO DE AREAS.

En esta última parte abordaremos dos temas:

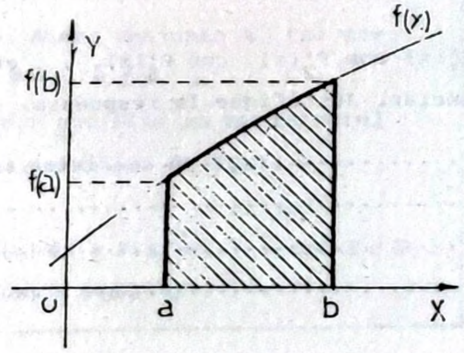
1) Dada una función f(x), encontrar otra función F(x) tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

Este proceso que se conoce con el nombre de **integración**, es el inverso del de la **diferenciación** la función F(x) es una **integral indefinida** o **una primitiva** de f(x).

2) Dada una función f(x) continua en un intervalo [a; b], hallar el **área del recinto limitado** por la curva asociada a f(x), las ordenadas f(a) y f(b), y el eje de abscisas.

Ejemplo:



Integral Indefinida

Comencemos entonces, por el concepto de **integral indefinida.**

Para llegar al mismo, le proponemos la siguiente actividad:

Sea f(x) continua en un intervalo [a; b], cuya fórmula es:

$$f(x) = 2x$$

1) Escriba la fórmulas de tres o más funciones definidas en [a; b], a las que llamará $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... etc, tales que:

$$F_1'(x) = f(x)$$

$$F_2'(x) = f(x)$$

$$F_3'(x) = f(x)$$

... ... etc.

.....

.....

.....

.....

2) Compare $F_1'(x)$ con $F_2'(x)$, con $F_3'(x)$, ... etc. y escriba en qué se diferencian. Justifique la respuesta.

.....

.....

.....

.....

3) Escriba simbólicamente la generalización de la conclusión a la que arribó en el punto anterior.

.....

.....

¿Desea asegurarse si trabajó correctamente?

Bien, controle sus respuestas con las nuestras, aunque tenga en cuenta que pueden no ser exactamente iguales pero sí análogas:

1) Así, las fórmulas pedidas pueden ser:

$F_1(x) = x^2$ pues $(x^2)' = 2x$

$F_2(x) = x^2 + 3$ pues $(x^2 + 3)' = 2x$

$F_3(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ pues $(x^2 - \frac{1}{4})' = 2x$

2) Se diferencian en el término independiente y ello se debe a que cualquiera sea el término independiente, por ser una constante, su derivada es nula.

3) $F(x) = x^2 + C$ con $C \in \mathbb{R}$

Todas estas funciones que hemos hallado: $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... , en general: $F(x)$ se denominan **integrales indefinidas o primitivas** de f(x). Luego, estamos en condiciones de dar el siguiente concepto:

> **Si f(x) es una función continua definida en algún conjunto A y existe una función F(x) definida en el mismo conjunto A, tal que:**
>
> $$F'(x) = f(x)\ ,$$
>
> **entonces decimos que F(x) es una integral indefinida o una primitiva de f(x).**
>
> **Se simboliza:**
>
> $$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{con } C \in \mathbb{R}$$
>
> **o bien** $\int f(x) = F(x) + C$

Así, en nuestro ejemplo, escribiremos:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Atención: No todas las funciones admiten primitivas.

Recordemos que este tema —como todos los de este Módulo— se desarrollará con detalle en el Curso de Análisis Matemático I.

Le adelantamos que existen tablas con las integrales más usuales, por ejemplo:

$$\int k\,dx = kx + C \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int k^x\,dx = \frac{k^x}{\ln k} + C \qquad \text{con } k > 0 \;,\; k \neq 1$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{sen} kx\,dx = \frac{-\cos kx}{k} + C$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

...

... etc.

Cada vez que lo necesite, consulte esta tabla u otra similar.

Ahora bien, sabiendo que la integración es el proceso inverso de la diferenciación y teniendo en cuenta la tabla precedente, resuelva y justifique las respuestas de los siguientes ejercicios:

1) $\int x^2\,dx =$ .....

.....

2) $\int (-x^2 + 2x - 3)\,dx =$ .....

.....

Seguramente sus respuestas son como las que a continuación le proporcionamos, de lo contrario, relea el tema.

1) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

pues $(\frac{x^3}{3} + C)' = \frac{3x^2}{3} + 0 = x^2$

2) $\int (-x^2 + 2x - 3)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C$

pues $(-\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + C)' = -\frac{3x^2}{3} + 2x - 3 + 0 = -x^2 + 2x - 3$

Integral Definida

¿Se preguntó ya qué relación hay entre la primera parte y la segunda de esta unidad ? o sea ¿qué relación existe entre el proceso de integración y el cálculo de áreas?

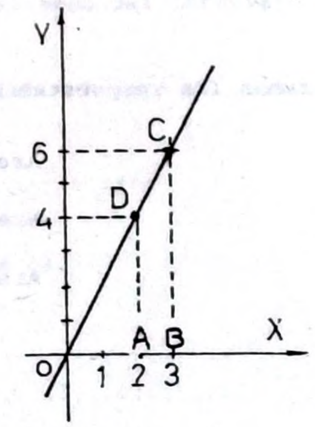
Llegamos así, al último punto de este tramo, que es precisamente el cálculo de áreas.

Veamos:

Sea por ejemplo la función

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = 2x$$

cuya gráfica vemos en la siguiente figura:



Considere a la función f en el [0; 2], por ejemplo.

Le proponemos la siguiente actividad:

1) Calcule el área del $\overset{\frown}{OAD}$. (Recuerde que: área triángulo = $\frac{\text{base. altura}}{2}$)

2) Escriba una primitiva F(x) de la función dada, por ejemplo para C=0, o sea:

$\int f(x)\,dx$ = ... con C=0

3) Especialice esta primitiva F(x) para los extremos del intervalo considerado, es decir, calcule:

F(b) = F(2)= ..... y F(a) = F(0) = ...

4) Obtenga F(b) - F(a) = F(2) - F(0) = ...

5) Compare los resultados obtenidos en 1) y en 4).
Enuncie la observación a la que llega.

.....
.....
.....

Sintetizamos las respuestas de esta actividad de la siguiente manera:

Area $\overset{\frown}{OAD}$ = F(b) - F(a)

Area $\overset{\frown}{OAD}$ = F(2) - F(0)

Area $\overset{\frown}{OAD}$ = 4

Tal situación se acostumbra a simbolizar así:

$$\text{Area } \overset{\frown}{OAD} = \int_0^2 2x\,dx = F(2) - F(0) = 4$$

Al número a (en este caso a=0) se lo denomina extremo inferior de la integral.
Al número b (en este caso b=2) se lo denomina extremo superior de la integral.

¿Intentamos otra actividad similar a la anterior para afianzar este concepto?
¿Sí? ¡Bien!

Considere la función f en el intervalo [a; b] = [2; 3].

1) Calcule el área del trapecio ABCD (Recuerde que: área trapecio= $\frac{\text{(base mayor + base menor). altura}}{2}$)

2) Escriba una primitiva F(x) de la función dada.

3) Especialice esta primitiva F(x) para los extremos del intervalo, o sea, calcule:

F(b) = F(3) = ... y F(a) = F(2) = ...

4) Obtenga: F(b) - F(a) = F(3) - F(2) = ...

5) Compare los resultados obtenidos en 1) y en 4).
Escriba la observación a la que ha arribado.

.....
.....

Resumimos las respuestas de esta actividad de la siguiente manera:

$$\text{Area } \overset{\frown}{ABCD} = F(b) - F(a)$$

$$\text{Area } \overset{\frown}{ABCD} = F(3) - F(2)$$

$$\text{Area } \overset{\frown}{ABCD} = 5$$

Tal situación la simbolizamos:

$$\text{Area } \overset{\frown}{ABCD} = \int_2^3 2x\,dx = F(3) - F(2) = 5$$

¿Qué enunciado general podemos expresar ahora?

Veamos.

En los dos ejemplos propuestos hemos verificado que:

El área delimitada por la gráfica de la función dada, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a los extremos del intervalo en que fue considerada la función, es igual a la diferencia entre la especialización de una primitiva cualquiera F(x) para el extremo derecho y para el extremo izquierdo del intervalo.

O sea, si el intervalo es [a; b], resulta:

$$\text{Area} = F(b) - F(a)$$

o bien: $$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Otra notación muy usual es:

$$\text{Area} = F(x)\Big]_a^b$$

Puede demostrarse (no es nuestra intención hacerlo) que estas igualdades se cumplen no sólo en nuestros ejemplos sino en general, bajo ciertas condiciones.

¿Encontró la relación entre el proceso de integración y el cálculo de áreas? Trate de enunciar nuevamente tal relación, comparándola con lo que usted expresó al inicio de este tema.

.....

.....

.....

.....

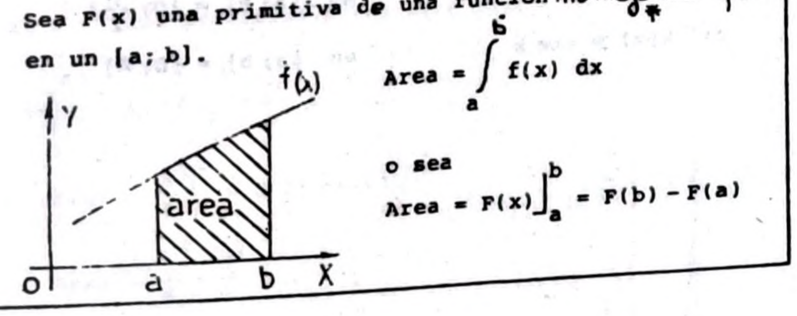
.....

.....

Verifique si su respuesta es análoga a la que le presentamos, a través de la siguiente regla:

Regla de Barrow para el cálculo de áreas:

Sea F(x) una primitiva de una función no negativa f(x) en un [a; b].



$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx$$

o sea

$$\text{Area} = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Nota: a estas integrales: $\int_a^b f(x)\,dx$ **se las denomina integrales definidas.**

Decimos que una función es no negativa en un [a;b] , cuando todas las imágenes de x∈[a;b] son $f(x) \geq 0$

Ya está usted en óptimas condiciones para realizar la última actividad de ésta unidad que es la siguiente:

Calcule y grafique las áreas delimitadas por las gráficas de las funciones cuyas fórmulas se dan a continuación, consideradas en los intervalos que en cada caso se indican.

1) $f(x) = x^2$ en $[a; b] = [1; 3]$

2) $g(x) = x^3$ en $[a; b] = [0; 2]$

3) $h(x) = \cos x$ en $[a; b] = [0; \frac{\pi}{2}]$

4) $k(x) = \cos x$ en $[a; b] = [0; \pi]$

Coteje sus desarrollos con los nuestros.

Tenga presente que pueden no ser idénticos, pero sí semejantes o equivalentes.

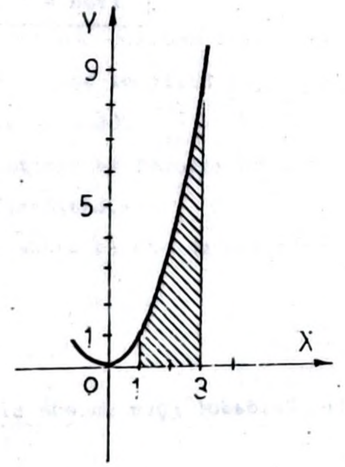
1) Si $f(x) = x^2$, una primitiva puede ser: $F(x) = \frac{x^3}{3}$

pues $(\frac{x^3}{3})' = \frac{3x^2}{3} = x^2$

Luego: Area $= \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 = F(3) - F(1)$

Area $= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}$

Area $= \frac{26}{3}$ (unidades de área)



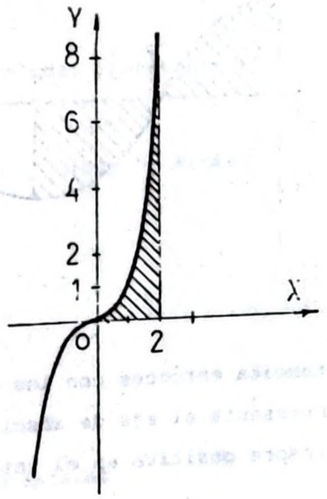
2) Si $g(x) = x^3$ una primitiva puede ser: $G(x) = \frac{x^4}{4}$

pues $(\frac{x^4}{4})' = \frac{4x^3}{4} = x^3$

Luego: Area $= \frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = G(2) - G(0)$

Area $= \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}$

Area $= 4$ (unidades de área)

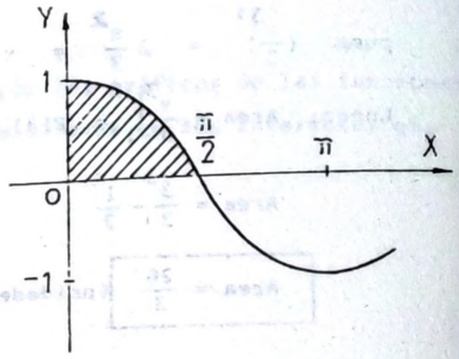


3) Una primitiva puede ser: $H(x) = \text{sen } x$ ¿verdad?

Por lo tanto: $\text{Area} = \text{sen } x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = H(\frac{\pi}{2}) - H(0)$

$\text{Area} = \text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } 0$

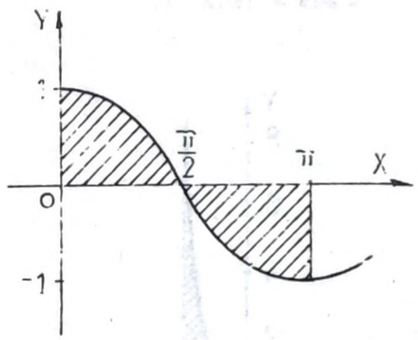
$\boxed{\text{Area} = 1}$ (unidad de área)



4) ¡Cuidado! ¿Qué sucede si usted integra entre 0 y π, directamente?

.....

.....



En efecto, la respuesta sería nula; pero como nos interesa calcular el área de la figura sombreada y ésta no es nula, debemos integrar entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ (por ejemplo), luego entre $\frac{\pi}{2}$ y π y finalmente, sumar el valor absoluto de ambos resultados.

Atención entonces con los extremos de integración, cuando la gráfica intersecta al eje de abscisas, o sea, cuando la función dada no es siempre positiva en el intervalo considerado.

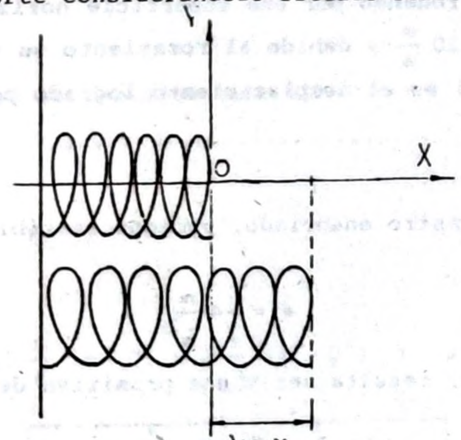
¿Vemos unas aplicaciones a la física?

Estamos seguros de que su respuesta es afirmativa.

Nos satisface su entusiasmo. ¡Adelante!

Ejemplo 1

Supongamos que deseamos calcular el trabajo efectuado por una fuerza al estirar un resorte desde su posición normal hasta una longitud 20 cm mayor, siendo la constante elástica del resorte $K = 3000 \frac{N}{m}$.
Podemos suponer que la fuerza necesaria para estirar el resorte es directamente proporcional al incremento de la longitud.
Visualicemos el resorte considerándolo situado sobre el eje de abscisas.



Existe, entonces, una constante K de proporcionalidad (constante elástica del resorte) tal que la fuerza está dada por:

$$|\vec{f}(x)| = K\ |\vec{\Delta x}| \qquad \text{(Ley de Hooke)}$$

En nuestro ejemplo:

$$|\vec{f}(x)| = K\ \vec{x}$$

Por lo tanto, el trabajo efectuado es:

$$L = \int_0^{0,20} \vec{f}(x) \cdot d\vec{x}$$

producto escalar

$$L = \int_0^{0,20} f(x)\ dx$$

$$L = \int_0^{0,20} K.x\ dx$$

Una primitiva de $f(x) = Kx$ puede ser $F(x) = K\frac{x^2}{2}$, luego

$$L = K\frac{x^2}{2}\Big]_0^{0,20} = 3000\ \frac{N}{m}\ [\frac{(0.20\ m)^2}{2} - \frac{(0\ m)^2}{2}]$$

$$L = 120\ N.m$$

$$\boxed{L = 120\ J}$$

EJEMPLO 2

Si lanzamos una bola rodando por una superficie horizontal con una velocidad inicial de $20\ \frac{m}{s}$ y debido al rozamiento su velocidad disminuye a razón de $4\ \frac{m}{s}$. ¿Cuál es el desplazamiento logrado por la bola hasta su detención?

Teniendo en cuenta nuestro enunciado, podemos escribir que la aceleración está dada por:

$$a = -4\ \frac{m}{s^2}$$

Como $a = \frac{dv}{dt} = v'(t)$ resulta ser **v** una primitiva de **a**, es decir:

$$\int_{t_o}^{t} a\ dt = \int_{v_o}^{v} dv$$

Luego:

$$\int_{t_o}^{t} -4\ \frac{m}{s^2}\ dt = v - v_o \Rightarrow -4\ \frac{m}{s^2}\ [t]_{t_o}^{t} = v - v_o \quad (1)$$

En el instanie inicial es $t_o=0$ y $v_o=20\ \frac{m}{s}$; reemplazando en (1):

$$-4\ \frac{m}{s^2}\ [t - 0] = v - 20\ \frac{m}{s}$$

$$\boxed{v = 20\ \frac{m}{s} - 4\ \frac{m}{s^2}\ t} \quad (*)$$

Además sabemos que:

$$v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

es decir, **s** es una primitiva de **v**.

Tal situación la simbolizamos:

$$\int_{t_o}^{t} v\ dt = \int_{s_o}^{s} ds = [s]_{s_o}^{s}$$

Luego:

$$\int_{t_o}^{t} (20\frac{m}{s} - 4\frac{m}{s^2}t)\ dt = s - s_o$$

O sea:

$$20\ \frac{m}{s}\ [t]_{t_o}^{t} - 4\ \frac{m}{s^2}\ [\frac{1}{2}\ t^2]_{t_o}^{t} = s - s_o$$

¿Cuánto valen t y s en el instante inicial?

.....

En efecto, es $t_o = 0$ y $s_o = 0$

Por lo tanto:

$$20\ \frac{m}{s}\ (t - 0) - 2\ \frac{m}{s^2}\ (t^2 - 0^2) = s - 0$$

$$\boxed{s = -2\ \frac{m}{s^2}\ t^2 + 20\ \frac{m}{s}\ t} \quad (**)$$

¿Y cuánto vale la velocidad cuando la bola se detiene?

.....

Si usted anotó que la velocidad es nula, es decir v=0, ¡correcto!

¿En qué instante ello ocurre?

.....

Pasemos a determinarlo. Considerando que:

$$v = 20\ \frac{m}{s} - 4\ \frac{m}{s^2}\ t$$

$$0 = 20\ \frac{m}{s} - 4\ \frac{m}{s^2}\ t_d \quad ; \text{ siendo } t_d = \text{tiempo de detención}$$

Luego:

$$4\ \frac{m}{s^2}\ t_d = 20\ \frac{m}{s} \Rightarrow t_d = \frac{20\frac{m}{s}}{4\frac{m}{s^2}} = 5\ s$$

¿Cuál es la posición (que coincide en este caso particular con el desplazamiento), que ocupa la bola al cabo de los 5 s?

¡Bien! es $\boxed{s_5 = \Delta s = 50\ m}$, pues reemplazando $t_d = 5\ s$ en (**) resulta:

$$\boxed{s = -2\ \frac{m}{s^2}\ (5s)^2 + 20\ \frac{m}{s}\ 5\ s \Rightarrow s_5 = 50\ m}$$

Y de esta manera, respondemos a la situación planteada.
Si aún le quedan aspectos sin suficiente comprensión, vuelva a resolver el problema.

Ahora, ... ¿Quiere pasear en globo?

EJEMPLO 3

Si usted está en un globo que se eleva con una velocidad constante de 29,4 $\frac{m}{s}$ y deja caer un objeto cuando la altura de aquél sobre la tierra es de 400 m en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es $|g| = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$

¿Cuál es:

1) la máxima altura a la que llega a estar el objeto?
2) el tiempo que está el objeto en el aire?
3) la velocidad del objeto cuando llega al suelo?

Coteje sus respuestas con las nuestras:

1) Altura máxima: 444,1 m.
2) El objeto está en el aire 12,52 s.
3) La velocidad con que llega al suelo es de $-93{,}3\ \frac{m}{s}$

¿Cómo justificamos estas respuestas?

De la siguiente manera: si consideramos la vertical hacia arriba como sentido positivo y ubicamos el sistema referencial en el suelo, tendremos:

$$g = -9{,}8 \frac{m}{s^2}$$

$$v = v_o + \int_{t_o}^{t} g\, dt \quad \Longrightarrow \quad v = v_o + g\,(t - t_o)$$

Como $t_o = 0$ será $v = v_o + gt$

Luego

$$v = 29{,}4 \frac{m}{s} + (-9{,}8 \frac{m}{s^2})\, t$$

$$\boxed{v = 29{,}4 \frac{m}{s} - 9{,}8 \frac{m}{s^2}\, t} \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que:

$$s = s_o + \int_{t_o}^{t} v\, dt \quad , \text{ siendo } t_o = 0, \text{ será}$$

$$s = 400\,m + \int_{0}^{t} (29{,}4 \frac{m}{s} - 9{,}8 \frac{m}{s^2}\, t)\, dt$$

$$s = 400\,m + 29{,}4 \frac{m}{s} [t]_0^t - 9{,}8 \frac{m}{s^2} [\frac{t^2}{2}]_0^t$$

$$s = 400\,m + 29{,}4 \frac{m}{s} (t - 0) - 4{,}9 \frac{m}{s^2} (t^2 - 0^2)$$

$$\boxed{s = 400\,m + 29{,}4 \frac{m}{s}\, t - 4{,}9 \frac{m}{s^2}\, t^2} \qquad (2)$$

Como usted sabe, cuando el objeto alcanza la altura máxima es v=0.

Luego, reemplazando en (1), siendo v_d la velocidad de detención (alcanza $h_{máx}$) y t_d el tiempo de detención (tiempo para $h_{máx}$) será:

$$v_d = 0 = 29{,}4 \frac{m}{s} - 9{,}8 \frac{m}{s^2}\, t_d$$

$$t_d = \frac{29{,}4 \frac{m}{s}}{9{,}8 \frac{m}{s^2}} \quad \Longrightarrow \quad t_d = 3\,s$$

para ese caso, la posición alcanzada por el objeto es de:

$$s_{máx} = 400\,m + 29{,}4 \frac{m}{s}\, t_d - 4{,}9 \frac{m}{s^2}\, t_d^2$$

$$s_{máx} = 400\,m + 29{,}4 \frac{m}{s}\, 3s - 4{,}9 \frac{m}{s^2}\, (3s)^2$$

$$\boxed{s_{máx} = 444{,}1\,m}$$

Para contestar la segunda pregunta, sabemos que, cuando el objeto toca el suelo, le corresponde posición nula, logrando el tiempo total t_t que el mismo estuvo en movimiento; en consecuencia, utilizando (2) será:

$$s_t = 0 = 400\,m + 29{,}4 \frac{m}{s}\, t_t - 4{,}9 \frac{m}{s^2}\, t_t^2$$

$$t_t = \frac{-29{,}4 \frac{m}{s} \pm \sqrt{(29{,}4 \frac{m}{s})^2 - 4.(-4{,}9 \frac{m}{s^2}).400\,m}}{2.(-4{,}9 \frac{m}{s^2})} = (3 \pm 9{,}52)\,s$$

$t_{1t} = (3 - 9{,}52)\,s = -6{,}52\,s$: solución matemática pero no física, pues no existen tiempos negativos.

$t_{1t} = (3 + 9{,}52)\,s = 12{,}52\,s = t_t$: solución matemática que corresponde al resultado físico.

Finalmente, podemos contestar la tercera pregunta ya que, cuando el objeto llega al suelo, con $t_t = 12{,}52\,s$, reemplazando en (1) resulta:

$$v = 29{,}4 \frac{m}{s} - 9{,}8 \frac{m}{s^2}.t_t$$

$$v = 29{,}4 \frac{m}{s} - 9{,}8 \frac{m}{s^2}.12{,}52\,s$$

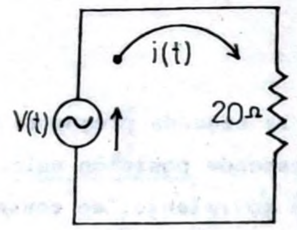
$$\boxed{v \cong -93{,}3 \frac{m}{s}}$$

¿Tuvo muchas dificultades para seguirnos en la explicación? No olvide que es conveniente detenerse en cada tema para comprenderlo cabalmente antes de continuar con un tema nuevo.

¡Adelante!

¿Qué le parece si vemos alguna aplicación a la electrónica?

En el circuito de la figura



la tensión del generador está dada por $V(t) = 200 \operatorname{sen} wt$

Le proponemos hallar:

a) La intensidad $i_{(t)} = \frac{1}{R} V_{(t)}$

b) La potencia $p_{(t)} = V_{(t)} . i_{(t)}$

c) La potencia media $P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt$.

Le proporcionamos este dato:

$$\int \operatorname{sen}^2 wt \, d(wt) = \frac{1}{2} (wt - \frac{1}{2} . \operatorname{sen} 2\,wt) + C$$

Coteje su trabajo con el nuestro:

a) Como $i_{(t)} = \frac{1}{R} V_{(t)}$ $\quad=\quad$ $i_{(t)} = \frac{1}{20} . 200 . \operatorname{sen} wt$

$$\boxed{i_{(t)} = 10 \operatorname{sen} wt \text{ A}}$$ (A: amperio)

b) Además:

$$p_{(t)} = V_{(t)} . i_{(t)}$$

$$p_{(t)} = (200 \operatorname{sen} wt) . (10 \operatorname{sen} wt)$$

$$\boxed{p_{(t)} = 2000 \operatorname{sen}^2 wt \text{ W}}$$ (W: vatio)

c) y como

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt$$

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2000 \, \text{sen}^2 \, wt \, d(wt)$$

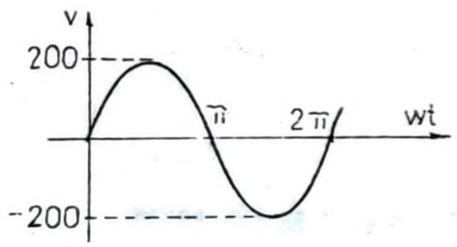
Luego:

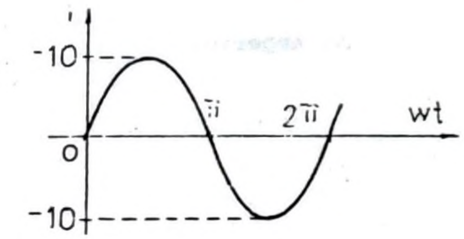
$$P = \frac{2000}{\pi} \frac{1}{2} \left[(wt - \frac{1}{2} \text{ sen } 2\,wt) \right]_0^{\pi}$$

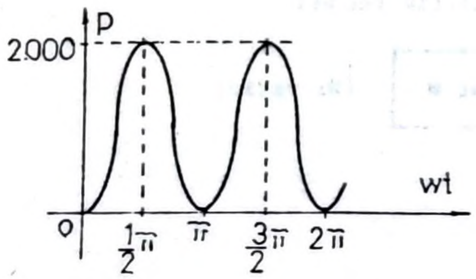
$$P = \frac{1000}{\pi} \left[\underbrace{(\pi - \frac{1}{2} \text{ sen } 2\pi)}_{\pi} - \underbrace{(0 - \frac{1}{2} \text{ sen } 2.0)}_{0} \right]$$

$$\boxed{P = 1000 \text{ W}}$$

Usted habrá notado que la corriente $i_{(t)}$ está relacionada con la tensión $V_{(t)}$ por la constante R.
La curva de potencia instantánea se puede obtener punto por punto, multiplicando las ordenadas correspondientes de v e i, como se indica en las siguientes gráficas:







Observe que como v e i son simultáneamente positivas o negativas en cualquier instante, su producto es siempre positivo.
Esto concuerda con el principio de conservación de la energía, es decir: siempre que circula una corriente eléctrica a través de una resistencia se consume una energía eléctrica que debe ser proporcionada constantemente por algún generador.

EJERCITACION

(Las respuestas figuran en la página N° 389).

EJERCICIO N° 7

Complete el siguiente cuadro según corresponda:

	FORMULA DE LA FUNCION	PRIMITIVAS
a)	$f(x) = 8$	$\int f(x)\,dx =$
b)	$g(t) = 8t$	$\int g(t)\,dt =$
c)	$h(z) = 8z^2 + z - 3$	$\int h(z)\,dz =$
d)	$s(t) = e^t + 1$	$\int s(t)\,dt =$

EJERCICIO N° 8

Si desde un punto situado a 3000 m sobre la tierra, en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es $|\vec{g}| = 10 \frac{m}{s^2}$, se lanza un objeto puntual verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de módulo 15 $\frac{m}{s}$, responda: ¿Cuál es la posición del objeto? y ¿cuál es su velocidad, 20 s después de iniciado el descenso?

Posición del objeto respecto del sistema referencial positivo, hacia arriba, adoptado desde el suelo: s = ...m

velocidad: V = ... $\frac{m}{s}$ $|\vec{V}|$ =

EJERCICIO N° 9

Lea atentamente y luego responda:

1° PARTE

Si una función f definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es de segundo grado, ¿de qué grado es la función f" (se lee: derivada segunda de f) que resulta de derivar a f dos veces consecutivas?

grado de f": 0

2° PARTE

Si la derivada g" (se lee: derivada segunda de g) de una función g es de primer grado, ¿de qué grado es g?

grado de g: nulo

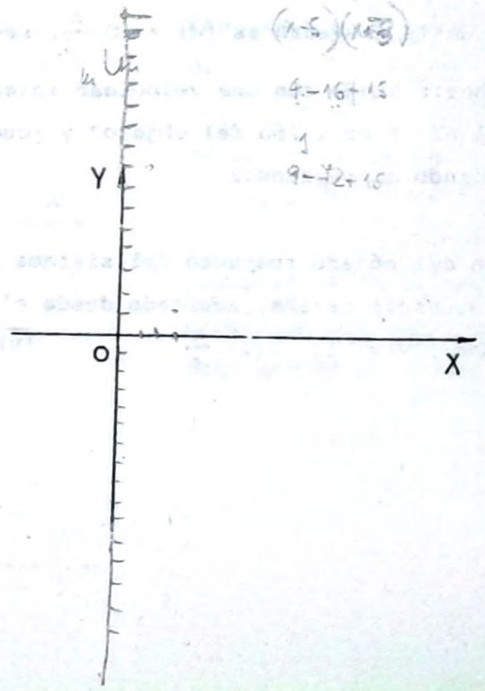
EJERCICIO N° 10

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; f(x) = x^2 - 8x + 15$

1° PARTE

Grafique la función.

X	Y
1	8
0	15



2° PARTE

Escriba el intervalo A en el cual la gráfica tiene pendiente positiva y el intervalo B en el cual la pendiente es negativa.

A = (4, +∞)

B = (-∞, 4)

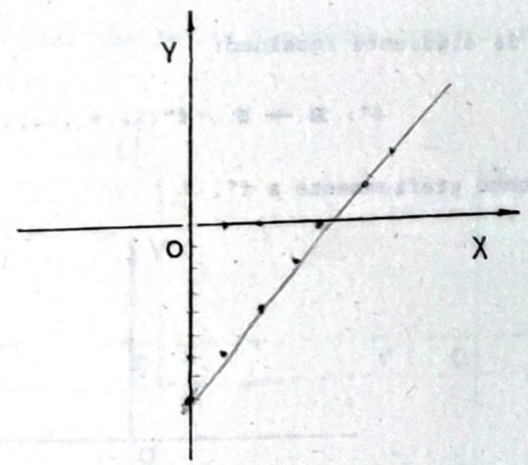
3° PARTE

Complete la siguiente igualdad:

$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; f'(x) =$ 2x - 8

y represente gráficamente a f'.

X	Y
1	-6
2	-4
3	-2
4	0
5	2
6	



4° PARTE

Escriba el intervalo C en el cual las ordenadas de esta función f' son negativas y el intervalo D en el cual son positivas.

C = (-∞, 4)

D = (4, +∞)

5° PARTE

Compare los resultados de la 2° y 4° parte de este ejercicio.
Exprese una conclusión basada en tal comparación.

6° PARTE

Escriba la pendiente m de la gráfica f'.

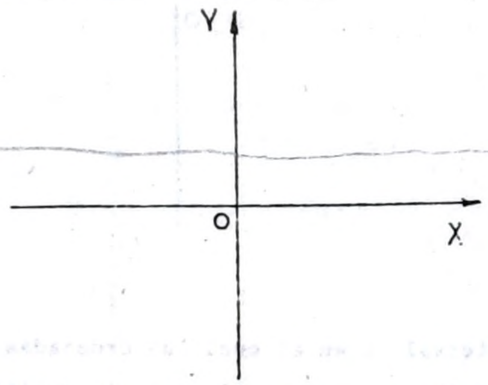
m = 2

7° PARTE

Complete la siguiente igualdad:

$f'': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \;/\; f''(x) =$ 2

y represente gráficamente a f".



8° PARTE

Compare los resultados de la 6° y 7° parte.

EJERCICIO N° 11

1° PARTE

Complete las líneas punteadas según corresponda:

a) $f(x) = -x^2$ $\Rightarrow \int_2^3 f(x)\,dx =$ .....

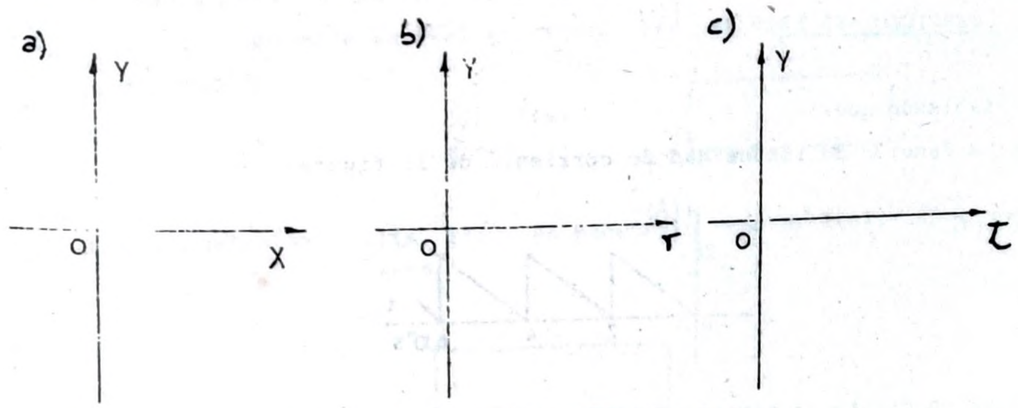
b) $s(t) = t + 3$ $\Rightarrow \int_0^3 s(t)\,dt =$ .....

c) $g(r) = r^2 - 2r - 3$ $\Rightarrow \int_1^4 g(r)\,dr =$ .....

¿Qué clase de integrales acaba de obtener? .....

2° PARTE

Represente gráficamente cada una de las funciones proporcionadas en la 1° PARTE de este ejercicio.



3° PARTE

Sobre las gráficas que acaba de representar, sombree el área determinada por: las curvas, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a los extremos de integración.

4° PARTE

Calcule el área correspondiente a las zonas sombreadas.

a) A = b) A = c) A =

5° PARTE

Analice los resultados que obtuvo en la 1° y 4° parte de este ejercicio. Enuncie una conclusión basada en tal comparación.

a) ¿Respuestas opuestas? ¿Por qué? .....
.....

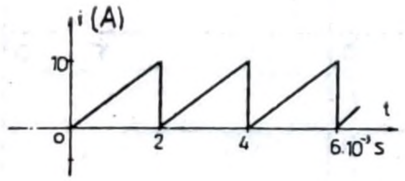
b) ¿Respuestas iguales? ¿Por qué? .....
.....

c) ¿Respuestas distintas? ¿Por qué? .....
.....

EJERCICIO N° 12

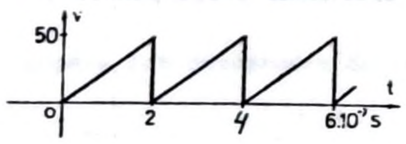
Sabiendo que:

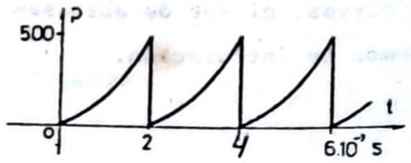
La función de intensidad de corriente de la figura:



es un diente de sierra periódico (de período T), que se aplica a una resistencia pura R de 5 ohm

Halle los valores instantáneos $v_{(t)} = R.i_{(t)}$, $p_{(t)} = v_{(t)}.i_{(t)}$ y la potencia media: $P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$ con estas gráficas.





$v_{(t)}$ = $p_{(t)}$ = P =

TRABAJO PRACTICO DE UNIDAD V: LIMITE. DERIVADA. INTEGRAL

(Las respuestas figuran en la página N° 393)

EJERCICIO N° 1

Exprese, sobre la línea de puntos, las condiciones que deben cumplirse para que una función f(x) tenga límite finito l cuando $x \to a$ con $a \in \mathbb{R}$.

.....

EJERCICIO N° 2

Lea las siguientes afirmaciones y escriba verdadero o falso, según corresponda.

a) Cuando $x \to a$ por la derecha la función $f(x) \to h$ y cuando $x \to a$ por la izquierda la $f(x) \to k$, siendo $h \neq k$, se dice que no existe $\lim_{x \to a} f(x)$:

b) Para calcular el $\lim_{x \to a} f(x)$ es necesario conocer f(a).

EJERCICIO N° 3

Calcule los siguientes límites: si alguno de ellos no existiera fundamente su respuesta.

a) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 2x^3 + 1) =$ .....

b) $\lim_{x \to 0} x(x+1) =$ .....

c) $\lim_{x \to -\pi} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$ .....

d) $\lim_{x \to 0} f(x) =$ ..... siendo $f(x)$: $\begin{cases} 3 \text{ si } x \in (-\infty; 0) \\ -2 \text{ si } x \in (0; +\infty) \end{cases}$

EJERCICIO N° 4

Escriba los valores de t en los cuales las siguientes funciones no son continuas, fundamente su respuesta..

a) $g: \mathbb{R} - \{0,2\} \to \mathbb{R} \;/\; g(t) = \frac{2t^2 - 4t}{t^2 - 2t}$

t = ... ¿Por qué? .....

b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; h(t)$: $\begin{cases} t^2 & \text{si } t \neq 3 \\ 4 & \text{si } t = 3 \end{cases}$

t = ... ¿Por qué? .....

EJERCICIO N° 5

Complete la siguiente afirmación, escribiendo mayor, igual o menor segun corresponda.

La derivada de una función en un punto x=a de su dominio es ..... a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto considerado.

EJERCICIO N° 6

Lea las siguientes afirmaciones y escriba verdadero o falso, según corresponda.

a) Todas las funciones son derivables en cualquier puntò dè su dominio. [FALSO]

b) Todas las funciones son integrables. [ ]

EJERCICIO N° 7

Calcule las derivadas de las funciones cuyas fórmulas son:

a) $f(x) = (x+3)(x-1)$ — $f'(x) =$ .....

b) $g(z) = \frac{z-3}{z}$ — $g'(z) =$ .....

EJERCICIO N° 8

1° PARTE

Obtenga la pendiente de la curva asociada a la función

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; h(s) = s^2 + 4s + 3$

h' = ...

2° PARTE

Indique el punto P de la curva en el cual la pendiente de la misma es nula.

P = ...

3° PARTE

Indique en qué intervalo la función dada tiene pendiente positiva y en qué intervalo tiene pendiente negativa.

a) Pendiente positiva en $(-2, +\infty)$

b) Pendiente negativa en $(-\infty, 2-)$

EJERCICIO N° 9

1° PARTE

Lea atentamente y luego responda:

Un punto material se mueve sobre el eje x con ecuación horaria:

$$x_{(t)} = 4t - t^2$$ (t en segundos, x en cm)

a) ¿Cuál es la variación de abscisas que experimenta el móvil entre los instantes $t_1 = 0\ s$ y $t_2 = 2\ s$?

$\Delta x = x_2 - x_1 =$ .....

b) ¿Cuál es el valor de la velocidad escalar media correspondiente a ese intervalo?

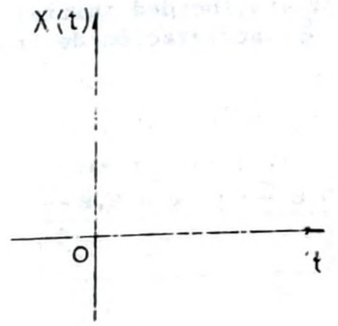
$V_m =$ .....

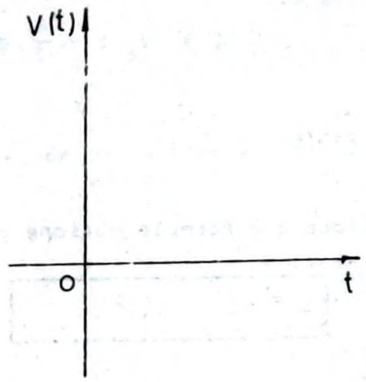
c) ¿Cuál es la fórmula de la velocidad escalar instantánea en función del tiempo?

$V_{(t)} =$ .....

2° PARTE

Represente gráficamente $x_{(t)}$ y $V_{(t)}$.

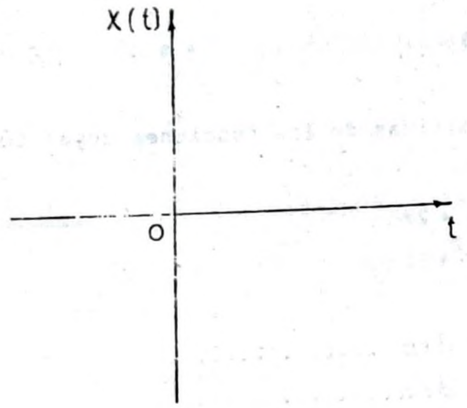




3° PARTE

Obtenga gráfica y analíticamente el valor de la velocidad escalar instantánea para $t_3 = 3,5\ s$

a) **Gráficamente**



b) **Analíticamente**

$V_{(t_3)} =$ .....

EJERCICIO N° 10

Sabiendo que·

La ecuación que nos permite calcular la altura de un cuerpo arrojado hacia arriba es:

$$h = V_o.t - \frac{1}{2}.g.t^2$$

(V_o : velocidad inicial
g : aceleración de la gravedad)

1° PARTE

Indique qué fórmula obtiene para $V_o = 19{,}6\ \frac{m}{s}$ y $g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$

h =

2° PARTE

Exprese en qué instante el cuerpo alcanza la altura máxima.
Fundamente su respuesta.

t =

¿Por qué? .....

EJERCICIO. N° 11

Indique las primitivas de las funciones cuyas fórmulas son las siguientes:

$f(x) = -x^2 + 2x$
$g(x) = -x^2 + 6x - 8$

a) $\int f(x)\,dx =$ .....
b) $\int g(x)\,dx =$ .....

EJERCICIO N° 12

1° PARTE

Una partícula con movimiento rectilíneo se desplaza según la expresión:

$$s = 20\,t^2 + 4t \qquad [s] = m \quad [t] = s$$

a) ¿Cuál es la velocidad inicial V_o de la partícula si en ese instante es t=0?

V_o =

b) ¿Cuál es su aceleración?

a =

2° PARTE

Una partícula con movimiento rectilínco parte del origen (siendo $t_o = 0$) con una velocidad inicial en el sentido del movimiento de $4\ \frac{m}{s}$ y y aceleración $a = 40\ \frac{m}{s^2}$ (también en el sentido del movimiento).

Indique la expresión de la posición s en función del tiempo t, para [s] = m y [t] = s

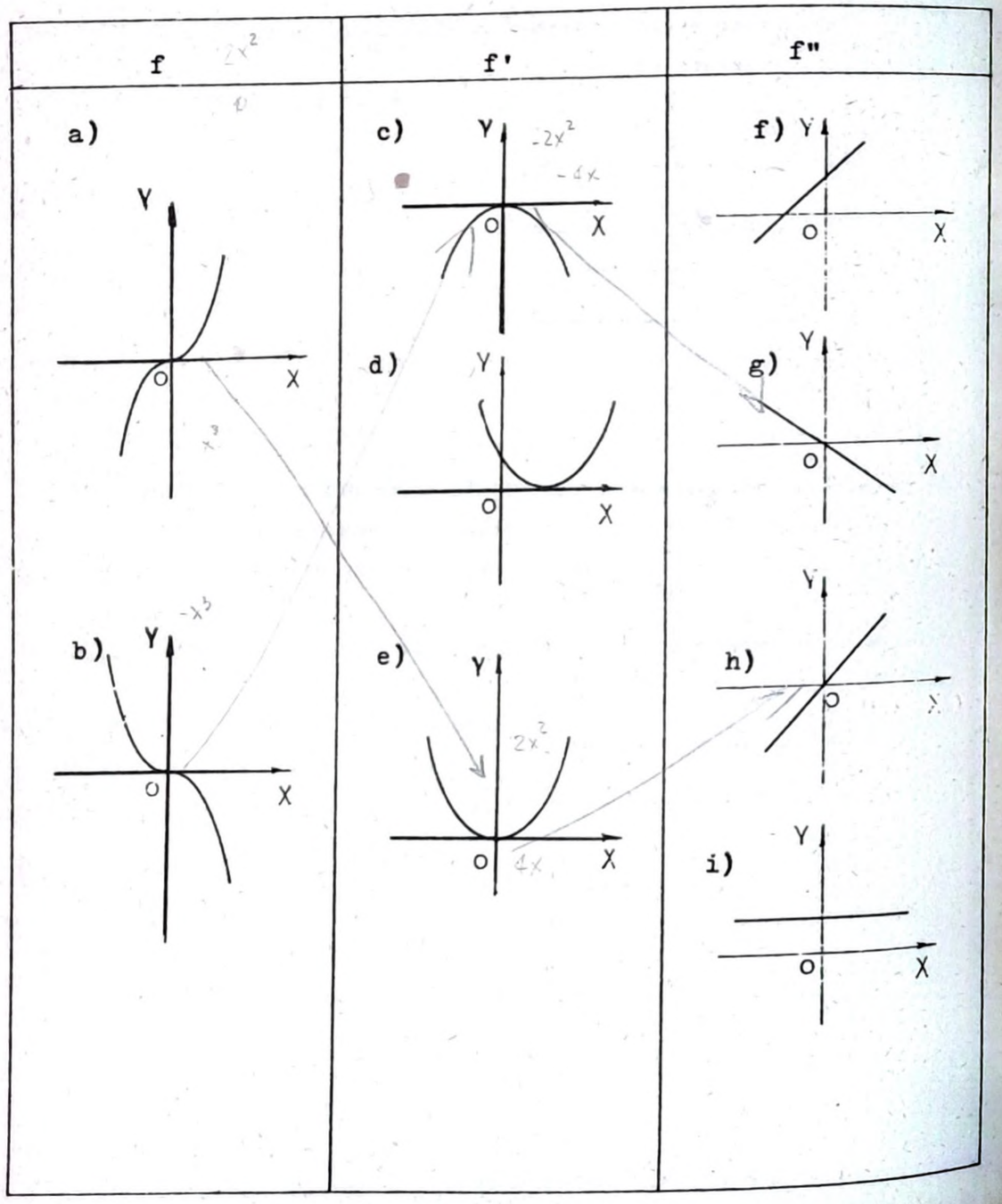
s =

EJERCICIO N° 13

Sea f una función definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, derivable.

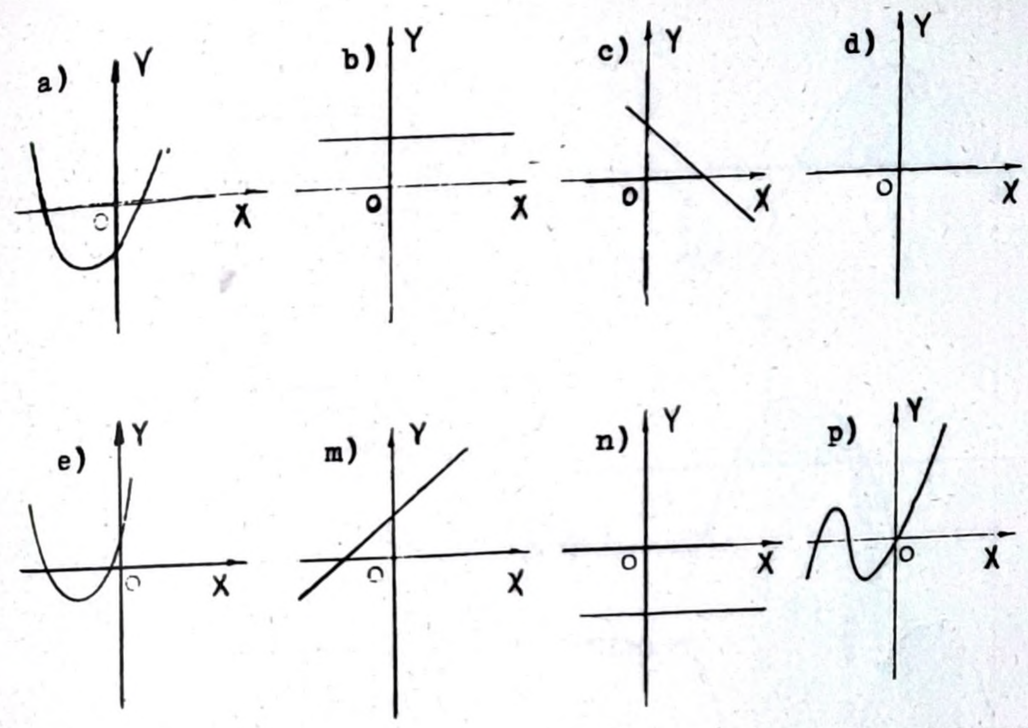
1° PARTE

Una con flecha la gráfica de una función con la correspondiente a sus derivadas.



2° PARTE

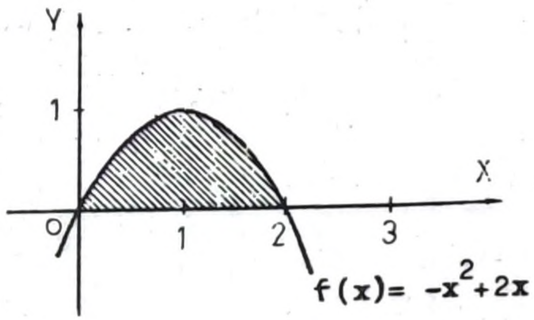
Dadas las siguientes gráficas escriba en los recuadros las letras de aquellas que puedan corresponder a f", f' y f, respectivamente.



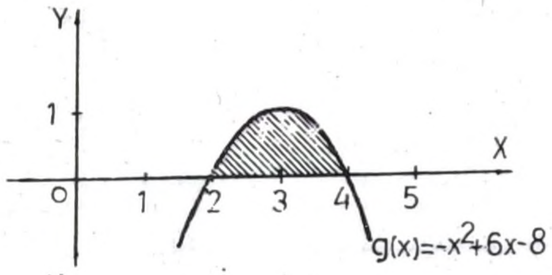
	f"	f'	f
1º	m	e	p
2º	b	m	e
3º			
4º			

EJERCICIO N° 14

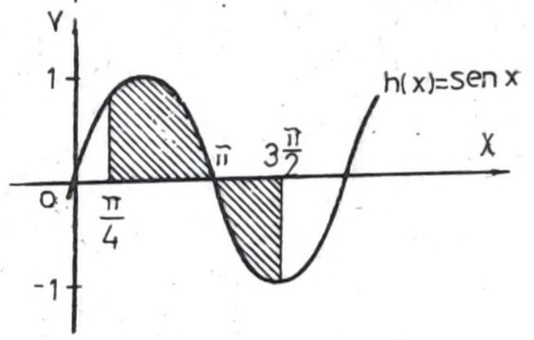
Calcule el área sombreada de las siguientes figuras.



A_1 =



A_2 =



A_3 =

EJERCICIO N° 15

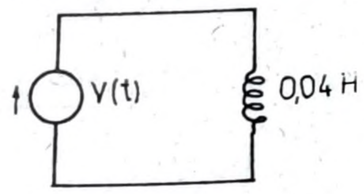
En bornes de una bobina de autoinducción L = 0,04 henry aplicamos una tensión $V_{(t)} = 200 \text{ sen } 1000\, t$.

Halle la corriente $i_{(t)} = \frac{1}{L}\int V_{(t)}\, dt$,

$P_{(t)} = V_{(t)} \cdot i_{(t)}$ y la potencia media

$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\, dt$

(Información: $\int \text{sen } kt\, dt = -\frac{\cos kt}{k} + C$).



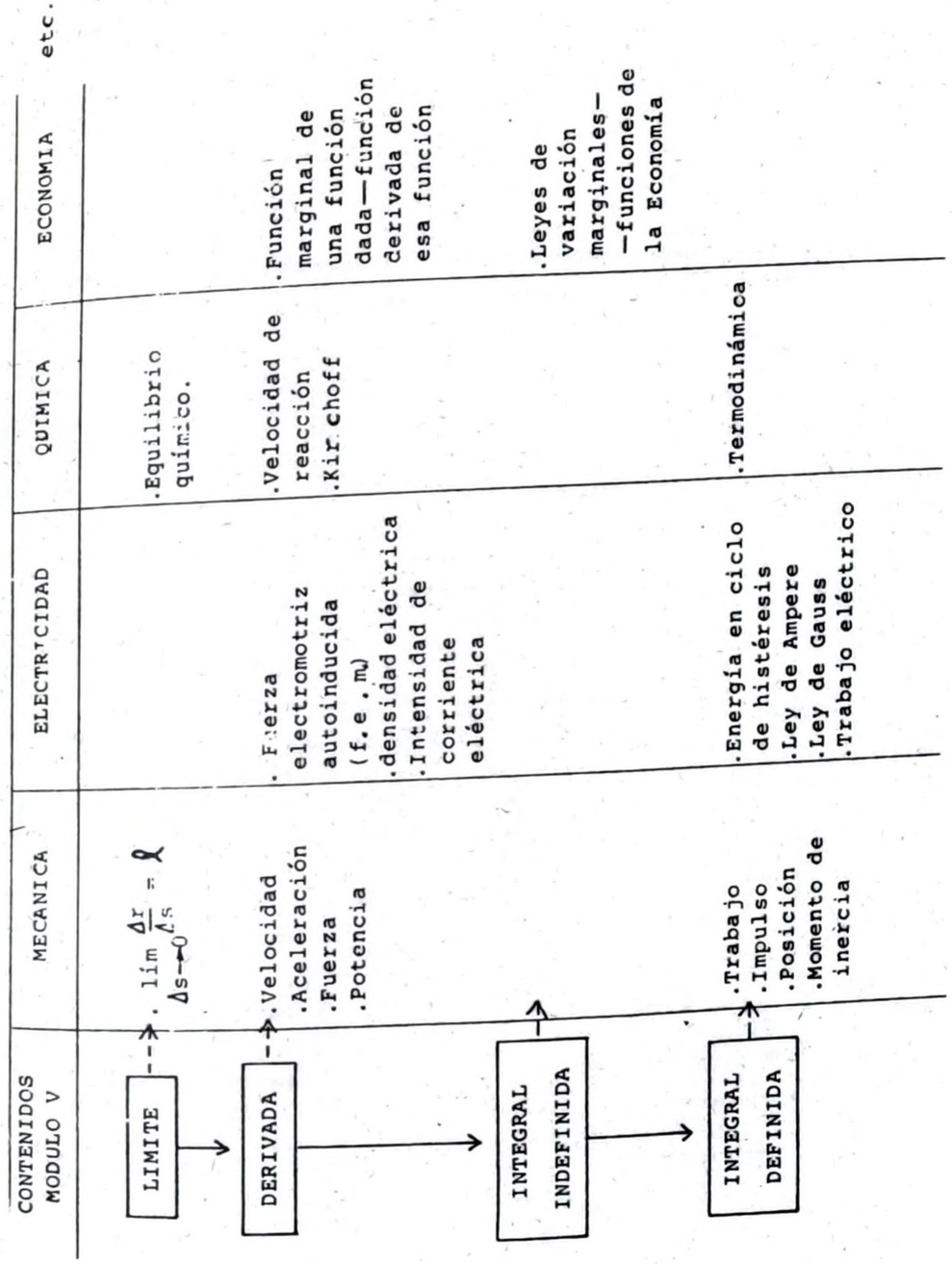
$i_{(t)}$ = ...

$P_{(t)}$ = ...

P = ...

A manera de integración...

Ahora vamos a presentar algunas aplicaciones de los contenidos de esta unidad en distintas disciplinas de estudio, en la U.T.N.



RESPUESTAS DE LA EJERCITACION DE UNIDAD N° V: LIMITE DERIVADA. INTEGRAL.

EJERCICIO N° 1 (Pág. 323)

a) -3

b) 64

c) 0

d) ∄, pues cuando x→1 por la derecha y por la izquierda, los resultados son diferentes.

EJERCICIO N° 2 (Pág. 342)

1° PARTE

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$$

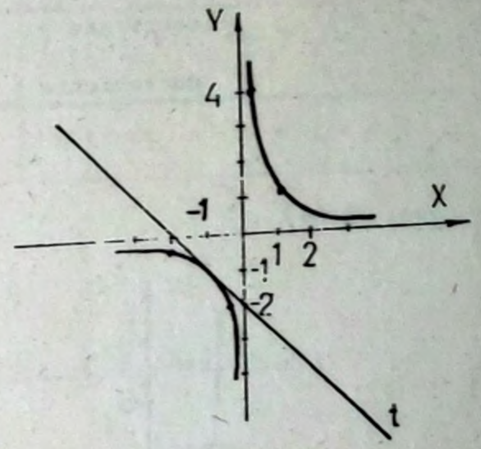
2° PARTE

$f'(\frac{1}{2}) = -4$

3° PARTE

$y = -x - 2$ o cualquier otra ecuación equivalente.

4° PARTE



EJERCICIO N° 3 (Pág. 344)

	FORMULA	DERIVADA
a)		$f'(x) = 12x^3$
b)		$g'(t) = -9t^2 - 4t$
c)		$h'(s) = 3s^2 - 6s + 1$
d)		$y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

EJERCICIO N° 4 (Pág. 344)

a) $t = \sqrt{3}\ s$

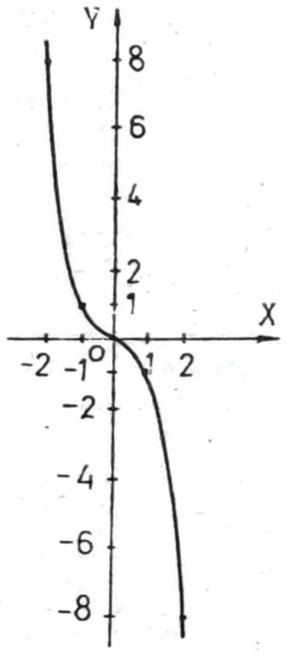
b) $t = 0\ s$

EJERCICIO N° 5 (Pág. 345)

a)	∪	creciente	positiva
b)	∩	decreciente	negativa
c)	∩	creciente	positiva
d)	∪	decreciente	negativa

EJERCICIO N° 6 (Pág. 346)

1° PARTE



2° PARTE

decreciente negativa x=0 nula

EJERCICIO N° 7 (Pág. 369)

	FORMULA	PRIMITIVAS
a)		$\int f(x)\,dx = 8x + C$
b)		$\int g(t)\,dt = 4t^2 + C$
c)		$\int h(z)\,dz = \frac{8}{3}z^3 + \frac{z^2}{2} - 3z + C$
d)		$\int s(t)\,dt = e^t + t + C$

EJERCICIO N° 8 (Pág. 369)

$s = 700\ m$

$|\vec{v}| = 215\ \frac{m}{s}$ $\qquad v = -215\ \frac{m}{s}$

EJERCICIO N° 9 (Pág. 370)

1° PARTE

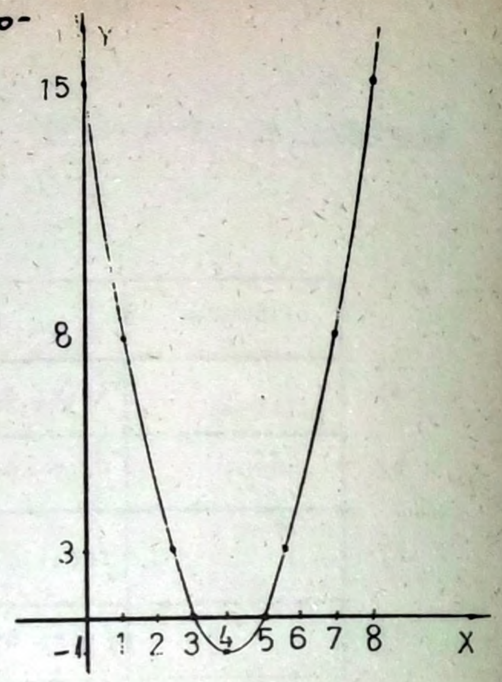
grado de f^n [cero]

2° PARTE

grado de g [tercero]

EJERCICIO N° 10 (Pág. 370)

1°PARTE



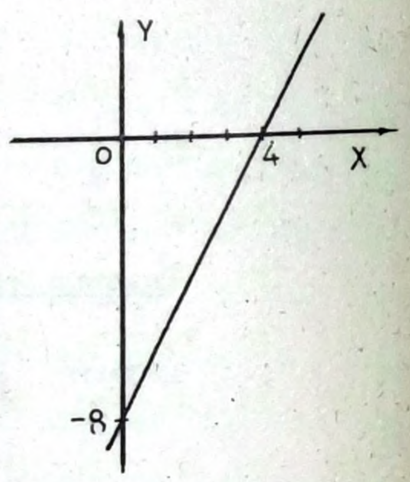
2° PARTE

A = (4; +∞)

B = (-∞; 4)

3° PARTE

$f'(x) = \frac{2x - 8}{\ldots\ldots}$



4° PARTE

C = (-∞; 4)

D = (4; +∞)

5° PARTE

A = D y B = C

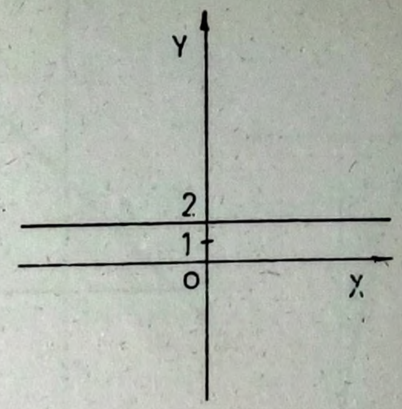
Por definición de pendiente a una curva y la representación gráfica de la misma.

6° PARTE

m = 2

7° PARTE

$f''(x) = \frac{2}{\ldots\ldots}$



8° PARTE

Son iguales.

EJERCICIO N° 11 (Pág. 373)

1° PARTE

a) $-\frac{19}{3}$

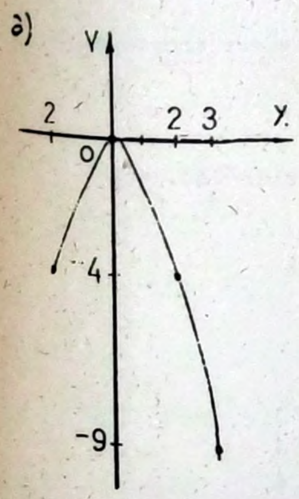
b) $\frac{27}{2}$

c) -3

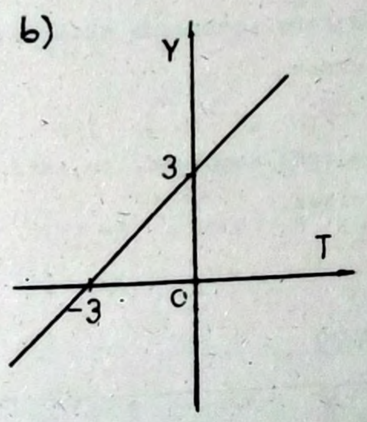
Integrales definidas

2° PARTE

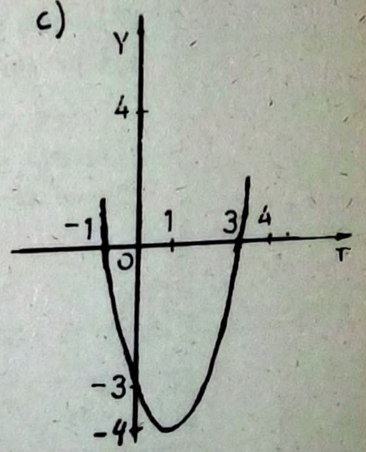
a)



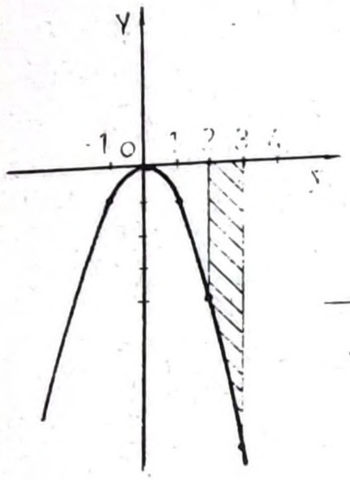
b)

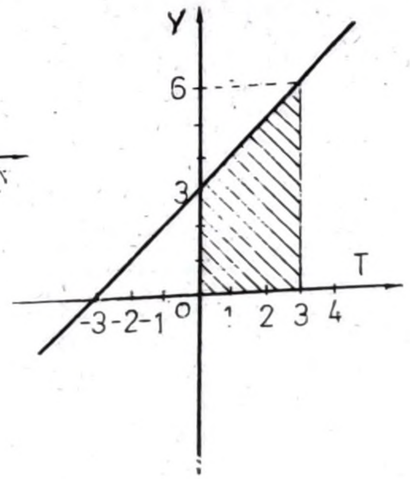


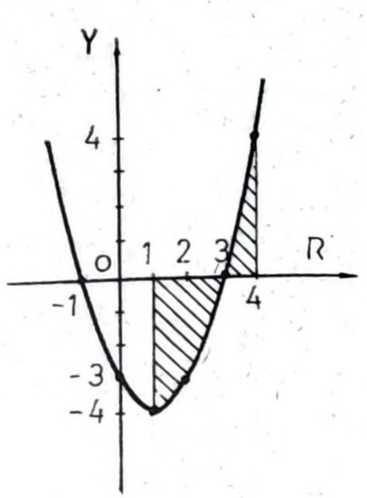
c)



3° PARTE







4° PARTE

a) $\boxed{A = \frac{19}{3}}$ unid. de área

b) $\boxed{A = \frac{27}{2}}$ unid. de área

c) $\boxed{A = \frac{23}{3}}$ unidades de área

5° PARTE

a) Sí, pues la zona sombreada está totalmente por debajo del eje de abscisas.

b) Sí, pues la zona sombreada está totalmente por encima del eje de abscisas.

c) Sí, pues la zona sombreada no está de un solo lado del eje de abscisas.

EJERCICIO N° 12 (Pág. 374)

$\boxed{V_{(t)} = 25.10^3\, t}$ $\boxed{p_{(t)} = 125.10^6\, t^2}$ $\boxed{P = 167\ W}$

RESPUESTAS DEL TRABAJO PRACTICO DE UNIDAD V:

LIMITE. DERIVADA. INTEGRAL.

EJERCICIO N° 1 (pág 375)

$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \delta > 0 / 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$

EJERCICIO N° 2 (pág 375)

a) Verdadero

b) Falso

EJERCICIO N° 3 (pág 376)

1° PARTE

1) 4
2) 0
3) -1
4) no existe - los limites laterales son distintos.

EJERCICIO N° 4 (pág 376)

a) t=0 y t=2 pues $\nexists\, g(0)$ y $\nexists\, g(2)$

b) t=3 pues $\lim_{t \to 3} h(t) \neq h(3)$ ya que

$\lim_{t \to 3} h(t) = 9$ y $h(3) = 4$

EJERCICIO N° 5 (pág 376)

igual
.....

EJERCICIO N° 6 (pág 377)

a) Falso

b) Falso

EJERCICIO N° 7 (pág 377)

a) $f'(x) = 2x + 2$

b) $g'(z) = \frac{3}{z^2}$

EJERCICIO N° 8 (pág 377)

1° PARTE

$h' = 2s + 4$

2° PARTE

$P = (-2; -1)$

3° PARTE

a) Pendiente positiva en: $(-2; +\infty)$

b) Pendiente negativa en: $(-\infty; -2)$

EJERCICIO N° 9 (pág 378)

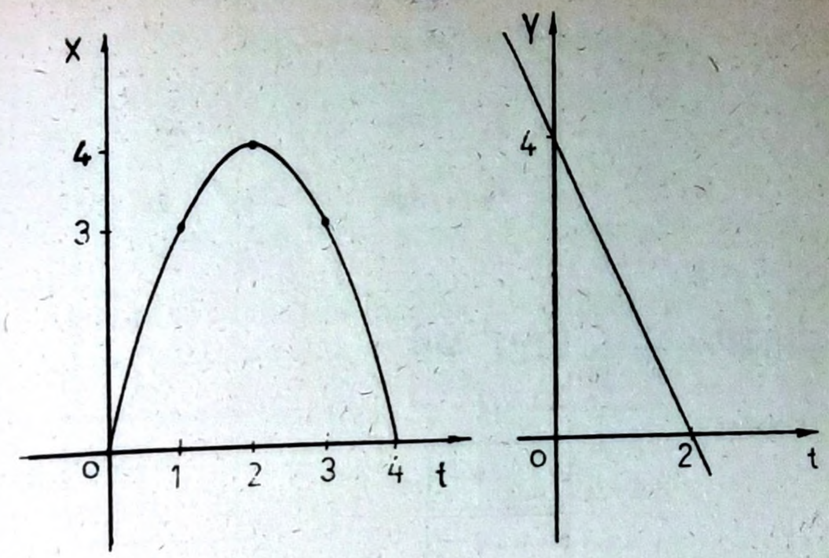
1° PARTE

a) $\Delta x = 4$ cm

b) $V_m = 2 \frac{cm}{s}$

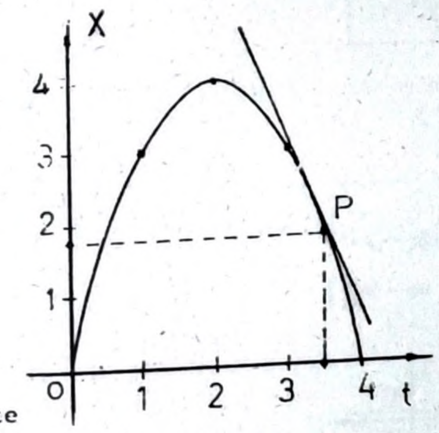
c) $V_{(t)} = 4 - 2t$

2° PARTE



3° PARTE

a) Gráficamente



Recuerde que...
Debemos trazar la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 3,5$.
O sea la recta de pendiente -3 y que pasa por el punto $P = (3,5 ; 1,75)$

b) Analiticamente

$V_{(t_3)} = -3 \frac{cm}{s}$

EJERCICIO N° 10 (pág 380)

1° PARTE

$h = 19,6\, t - 4,9\, t^2$

2° PARTE

$t = 2$ s pues $V = 0$

EJERCICIO N° 11 (pág 380)

a) $\int f(x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + x^2 + C$ con $C \in \mathbb{R}$

b) $\int g(x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + C$ con $C \in \mathbb{R}$

EJERCICIO N° 12 (pág 381)

1° PARTE

$v_o = 4\ \frac{m}{s}$

$a = 40\ \frac{m}{s^2}$

2° PARTE

$s = 20\,t^2 + 4t$

EJERCICIO N° 13 (pág 382)

1° PARTE

a) ⟷ e) ⟷ h)

b) ⟷ c) ⟷ g)

2° PARTE

	f"	f'	f
1°	m	e	p
2°	b	m	e
3°	d	n	c
4°	d	b	m

EJERCICIO N° 14 (pág 384)

a) $A_1 = \frac{4}{3}$

b) $A_2 = \frac{4}{3}$

c) $A_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2$

EJERCICIO N° 15 (pág 384)

$i_{(t)} = -5\cos 1000\,t$ A

$P_{(t)} = -500 \operatorname{sen} 2000\,t$

P = 0

TRABAJO PRACTICO COMPLEMENTARIO N° 1

Las respuestas figuran en pág. 411

Ejercicio N°1:

Sean las funciones: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2x^2 + 1$

$g: \mathbb{R} - \{-8, 1\} \to \mathbb{R} / g(x) = x + 2$

Complete las siguientes tablas según corresponda:

1)

	x	f(x)	g(x)
a)	-2	9	0
b)	0	1	2
c)	1	3	~~5~~
d)	3	19	5

2)

	x	f(x)
a)	~~+1~~	3
b)	~~3~~	-6

3)

	x	g(x)
a)	18	20
b)	~~3~~	-6

Ejercicio N°2:

Calcule el valor de k , sabiendo que:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{k}{x+2} = \frac{3x+3}{x^2+x-2}$$

K =

Ejercicio N°3:

Resuelva las siguientes inecuaciones y luego represente gráficamente el conjunto solución de cada una de ellas:

1) $\frac{2}{3}x - 1 \leq 3$

2) $\left|\frac{2}{3}x - 1\right| \leq 3$

3) $x^2 - 25 < 0$

4) $x^2 - x \geq 0$

5) $|x + 2| > 8$

Ejercicio N°4:

Resolver analítica y gráficamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$ no entiendo.

Ejercicio N°5:

¿ Para qué valores de k, el siguiente sistema tiene soluciones positivas ?

$$\begin{cases} 2x+7y = k \\ 3x+5y = 13 \end{cases}$$

Ejercicio N°6:

Resolver la siguiente ecuación :

$$\frac{\log (30x + 40)}{\log 5x} = 2$$

Ejercicio N°7:

Lea atentamente y luego resuelva:

La distancia entre dos estaciones ferroviarias es de 96 km. El tren rápido recorre este camino $\frac{2}{3}$ de hora más rápidamente que el tren de pasajeros ordinario. Halle la velocidad de cada tren, si se sabe que la diferencia de velocidades es de 12 $\frac{km}{h}$.

Ejercicio N 8:

Reduzca a su mínima expresión:

1) $-\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{1-\cos\alpha} - \frac{1+\cos(-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha} =$

2) $1 - \frac{\operatorname{sen}^2(-\alpha)}{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} =$

3) $\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\cos(\pi-\alpha) \cdot \operatorname{cotg}(\alpha+\pi)} =$

Ejercicio N 9:

¿A qué intervalos pertenece α para que se cumplan las siguientes desigualdades ? (Considerar $0° \leq \alpha \leq 360°$)

1) $\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} \geq 0$

2) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen}\alpha \leq 0$

3) $\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3} \geq 0$

Ejercicio N 10:

El ángulo de situación de la cúspide de un poste es de 32° respecto a un punto situado a 25 m de su base; halle la altura del poste.

Ejercicio N°11:

Calcule los siguientes limites:

1) $\lim_{x \to -1} x^2+4x-1 = -4$

2) $\lim_{x \to 0} x^3+3 = 3$

Ejercicio N°12:

Se sabe que el camino recorrido por un cuerpo que cae libremente se calcula mediante: $s = \frac{1}{2} gt^2$, donde s se considera en metros, $g = 9{,}8 \frac{m}{s^2}$ es la aceleración de la gravedad, t es el tiempo en segundos.

Calcule:

1) La velocidad media del cuerpo en el intervalo de tiempo de $t_1 = 2$ a $t_2 = 5$.

2) La velocidad v del cuerpo en el instante t= 2.

Ejercicio N°13:

Un cuerpo se desplaza con movimiento rectilineo uniformemente acelerado según la expresión : $s = 5t^2+8t+10$, donde s representa al camino recorrido en metros, t es el tiempo en segundos. Responda, justificando su afirmación:

1) ¿Cuál es la velocidad al iniciar el 8° segundo ?

2) ¿En que instante la velocidad es de 128 m/seg ?

Ejercicio N°14:

Dada la función $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(s) = s^2 + 2s$, calcule :

1) $\lim_{s \to 1} h(s) =$

2) $h'(s) =$

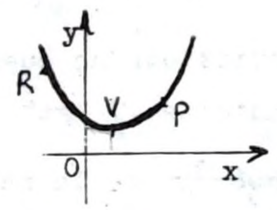
3) $\int h(s)\, ds =$

4) $\int_{-3}^{-1} h(s)\, ds =$

5) El área delimitada por la gráfica de h, el eje de abscisas y las ordenadas correspondientes a $x_1 = -3$ y $x_2 = -1$

Ejercicio N°15:

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = ax^2+bx+c$ cuya gráfica observamos:



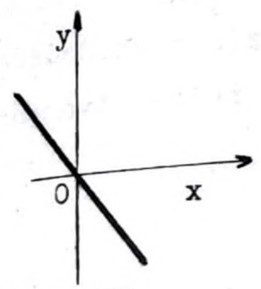
complete las siguientes afirmaciones para que resulten verdaderas:

1) En P la pendiente de la curva es ....., en V es ..... y en R es ..... .

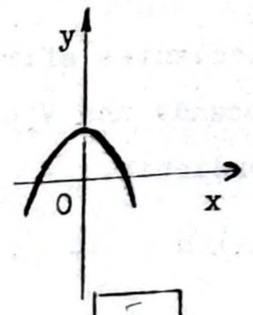
2) La gráfica de la derivada de f es una ..... pendiente ..... .

Ejercicio N°16 :

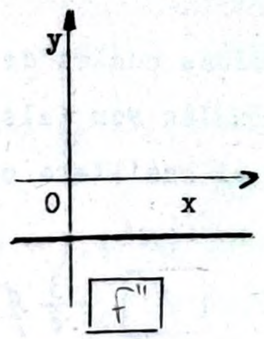
Dadas las gráficas:



f'



F

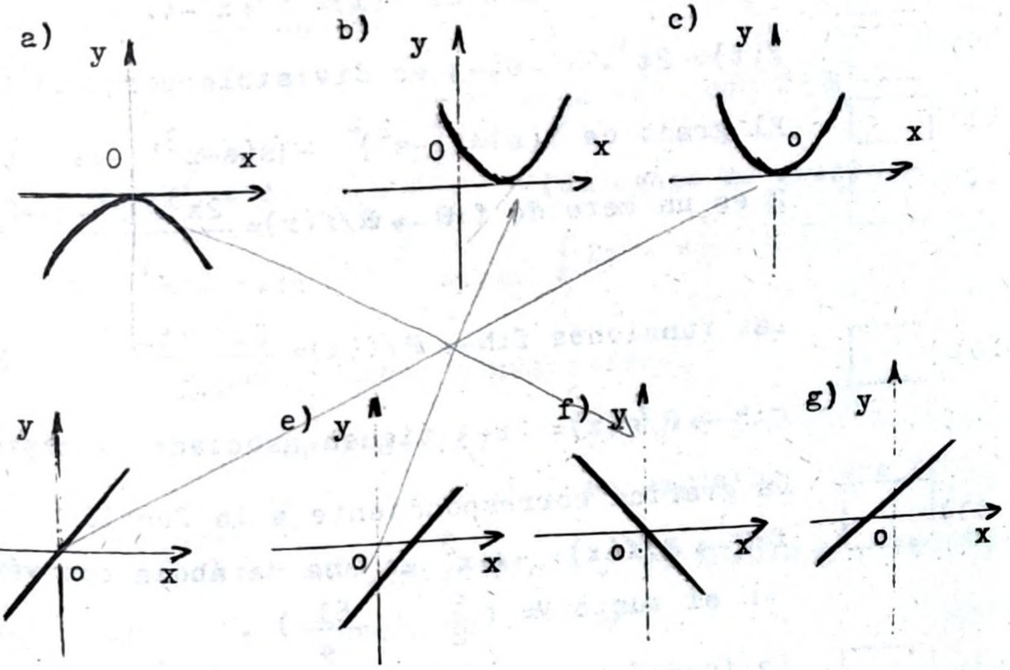


f''

Consigne en cada uno de los recuadros en blanco : f , f' o f'' según corresponda.

Ejercicio N°17 :

Una con flechas la gráfica de una función con la correspondiente a su derivada .



TRABAJO PRACTICO COMPLEMENTARIO Nº 2

(Las respuestas figuran en pág. 413)

Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas colocando una V o una F, respectivamente, en el casillero correspondiente.

1) [V] $\frac{3}{8} \notin Z$

2) [F] $(-1 + \frac{7}{8}) \notin Q$

3) [V] $(-\frac{1}{2})^{-1} \in \mathbb{Z}$

4) [V] $\sqrt{-\frac{3}{5} : \frac{1}{25} + 6} \in \mathbb{R}$

5) [ ] $\left| -\frac{3}{4} + (\frac{1}{2} - 1)^3 \cdot 2 \right| \notin N$

6) [ ] -1 es raíz doble de $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

7) [ ] $P(t) = 2t^3 - 7t^2 + 8t - 3$ es divisible por $Q(t) = 2t - 3$

8) [ ] El grado de $P(s) = (1 - s^2)^2 - 3s(s - s^3) - 4s^4$ es dos.

9) [ ] 2 es un cero de $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}{x^4 + 1}$

10) [ ] Las funciones $f:N \to \mathbb{R} / f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 3}{x+1}$ y $g:N \to \mathbb{R} / g(x) = 2x + 3$ tienen asociada la misma gráfica.

11) [ ] La gráfica correspondiente a la función $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 9x - x^2$ es una parábola con vértice en el punto $V = (\frac{9}{2} ; \frac{81}{4})$.

12) [ ] La función $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(t) = -2t + 1$ es biyectiva y su inversa es $h^{-1}(t):\mathbb{R} \to \mathbb{R} / h^{-1}(t) = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2}$

13) [ ] La función $k:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / k(m) = 3m^2 + 1$ es par.

14) [ ] La función $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(m) = 3m^2$ es estrictamente creciente.

15) [ ] Sean f y g dos funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que: $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = 2x$.
Resulta: $g \circ f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / (g \circ f)(x) = 2(x^3 - 1)$

16) [ ] $\lim_{x \to -1} (4x^2 - 2x + 1) = -1$

17) [ ] Sea f una función derivable, tal que: $f(s) = \frac{1}{2} s^2 + 1$.
Resulta: $f'(s) = s$.

18) [ ] La gráfica de $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(t) = t^2 + 2t$ tiene pendiente positiva en todos sus puntos.

19) [ ] Si la derivada f' de una función f es lineal, resulta f cuadrática.

20) [ ] $\int (x^2 + 4)\, dx = \frac{1}{3} x^3 + 4x + C$ con $C \in \mathbb{R}$

21) [ ] $\int_1^3 (x^2 + 4)\, dx = \frac{50}{3}$ (unidades de área)

22) [ ] La solución del sistema $\begin{cases} 2x - 4y - 1 = -11 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ son dos números pares consecutivos.

23) [ ] La ecuación : $\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z = 1$, (sabiendo que $0° \leq z < 2\pi$) se satisface para tres valores.

24) [ ] Cualquiera sea el ángulo α, se cumple: $1 - \sec^2 \alpha = -\operatorname{tg}^2 \alpha$.

TRABAJO PRACTICO COMPLEMENTARIO N°3

(Las respuestas figuran en pág. 413)

En la cuadrícula que le presentamos a continuación debe marcar una cruz en el casillero correspondiente, para indicar la respuesta correcta de cada ejercicio.
Si se equivoca, rellene por completo el casillero y coloque la cruz donde considere adecuado.
La corrección de este Trabajo Práctico se hace en base a lo consignado en esta cuadrícula. Por favor, no omita registrar sus respuestas en ella.

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1						11					
2						12					
3						13					
4						14					
5						15					
6						16					
7						17					
8						18					
9						19					
10						20					

Ejercicio N°1:

El resultado del ejercicio $3^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} - 4\frac{\sqrt{3}}{3}$ es un número h.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ? :

(A) $h = 1 + \sqrt{3}$

(B) $h = 1 - \sqrt{3}$

(C) $h = \sqrt{3}$

(D) $h = |1 - \sqrt{3}|$

(E) $h \in Q$

Ejercicio N°2:

¿Cuál de las siguientes afirmaciones corresponde al enunciado de:" La cuarta parte de la suma de un número h y su cuadrado, menos el cuadrado del consecutivo de h, es tres ". ?

(A) $\frac{1}{4}(h + h^2) - h^2 + 1 = 3$

(B) $\frac{1}{4}\left[h + h^2 - (h+1)^2\right] = 3$

(C) $\frac{h + h^2}{4} - (h+1)^2 = 3$

(D) $\frac{1}{4}(h + h^2) - h^2 - 1 = 3$

(E) Falta información para decidir.

Ejercicio N°3 :

El resultado de : $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \cdot \frac{16x^3 - 16x^2}{x^2 - 1}$ con $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

es:

(A) 16

(B) $16(x+1)^2$

(C) $\frac{16}{x-1}$

(D) $\frac{16}{x+1}$

(E) Ninguna de las respuestas anteriores es verdadera.

Ejercicio N°4:

El resto de la división $(t^4 - t^2 + t - 2) : (t+2)$ es :

(A) 8

(B) 16

(C) 12

(D) 20

(E) Ninguno de los números anteriores.

Ejercicio N° 5 :

El factoreo del polinomio $P= 2x^3 -x^2-2x+1$, en función de sus raíces, es:

(A) $P = (x+1)(x-1)(x+\frac{1}{2})$

(B) $P = (x+1)(x-1)(x-\frac{1}{2})$

(C) $P = 2(x+1)(x-1)(x+\frac{1}{2})$

(D) $P = 2(x+1)(x-1)(x-\frac{1}{2})$

(E) Ninguna de las expresiones anteriores.

Ejercicio N° 6 :

La expresión $10^{-\log x}$, con x real positivo, es equivalente a :

(A) x^{10}

(B) $-x$

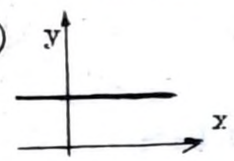
(C) $\log 10 \cdot \log x^{-1}$

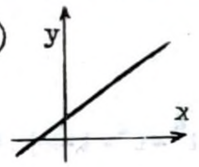
(D) x^{-1}

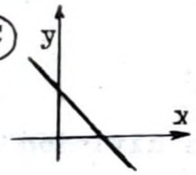
(E) $-x^{-1}$

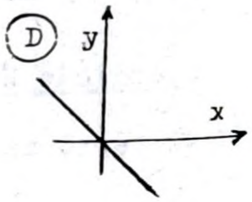
Ejercicio N° 7 :

La gráfica de la función $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} / f(x)=mx+h$ (con $m<0$, $h<0$) puede ser:

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio N° 8:

La recta de ecuación $x+8y+16=0$ tiene abscisa al origen a y ordenada al origen b . ¿Cúal de las siguientes afirmaciones es verdadera ? :

(A) a=16 y b=8

(B) a=-16 y b=-8

(C) a=-16 y b=8

(D) a= 16 y b=-8

(E) Ninguna de las anteriores.

$mx+b=0$

$y=mx+b$

$x+8y=-16$

$8y=-16-x$

$y=\frac{-16-x}{8}$ $y=-\frac{2-x}{8}$

Ejercicio N° 9:

Considere un triángulo rectángulo tal que la medida de sus catetos son dos números pares consecutivos: h el menor y k el mayor. Además, la hipotenusa mide $\sqrt{52}$.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? :

(A) h =2 y k =4

(B) h =4 y k =6

(C) h =6 y k =4

(D) h =6 y k = 8

(E) Ninguna de las anteriores.

$h^2=b^2+k^2$

$(\sqrt{52})^2=h^2+k^2$ $(h+2)^2+h^2=52$

$52=h^2+k^2$

Ejercicio N° 10:

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? :

(A) El valor máximo de la función seno es 1.

(B) El conjunto imagen de la función tangente es $\mathbb{R}^+$.

(C) El valor mínimo de la función coseno es 0.

(D) El conjunto imagen de la función coseno es el intervalo (-1;1) .

(E) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio N° 11:

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? :

(A) Cuando $90° < \alpha < 180°$, siempre se cumple: $-\text{sen}\alpha > \cos\alpha$.

(B) Cuando $\cos\alpha < \text{sen}\,\alpha$, significa que α debe pertenecer al segundo cuadrante.

(C) Cuando $tg\,\alpha = 1$ se verifica que: $\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha$.

(D) Cuando $\text{sen}\,\alpha + \cos\beta = 1$ significa que $\alpha = \beta = 90°$.

(E) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio N° 12:

¿Cuál es el valor de k para que la división

$(4x^2 - kx + 1) : (2x-1)$ resulte exacta ?

(A) 4

(B) -4

(C) 2

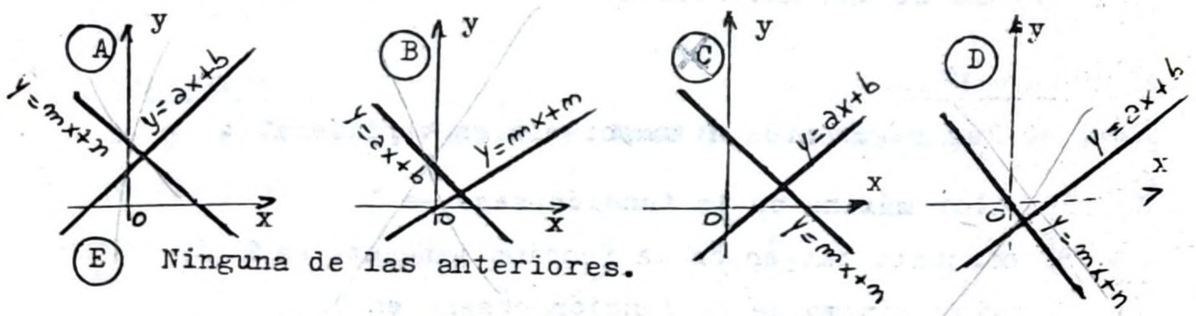
(D) -2

(E) Ninguno de los anteriores.

Ejercicio N° 13:

Sea el sistema $\begin{cases} y = ax+b \\ y = mx+n \end{cases}$ (con $a > 0, b < 0, m < 0, n > 0$).

¿Cuál de las siguientes gráficas podría corresponder al sistema dado?:



(E) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio N° 14:

Dados los polinomios $P(x) = 3ax^2 - \frac{5}{2}bx + c$; $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}bx - 5$.

y sabiendo que $P(x) + Q(x) = (b + c + \frac{7}{2})x^2 + 3cx - 7a$,

¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:

(A) a=-1 b= -2 c= -2

(B) a= 1 b =2 c=-2

(C) a=1 b =-2 c=2

(D) a =-1 b = 2 c=2

(E) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio N° 15:

¿En cuál de los siguientes casos se cumple que L=2 ? :

(A) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} = L$

(B) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x - 1}{x} = L$

(C) $\lim_{x \to 2} \frac{2x - 2}{x} = L$

(D) $\lim_{x \to 1} \frac{x + 3}{2x} = L$

(E) Ninguno de los anteriores.

Ejercicio N° 16 :

Sean f y g dos funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? :

(A) $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / (g \circ f)(x) = (x+1)^2$

(B) $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / (f \circ g)(x) = x^2 + x + 1$

(C) $g \circ f$ es una función lineal

(D) $f \circ g$ es una función exponencial.

(E) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio N° 17:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(t) = \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}$

¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? :

(A) f no es polinómica .

(B) f es par.

(C) f es impar.

(D) $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} / f^{-1}(t) = \frac{3}{2}t + 2$ es la inversa de f .

(E) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio N°18 :

Sea la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} / g(s) = -s^3$.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? :

(A) g es par

(B) g es estrictamente creciente.

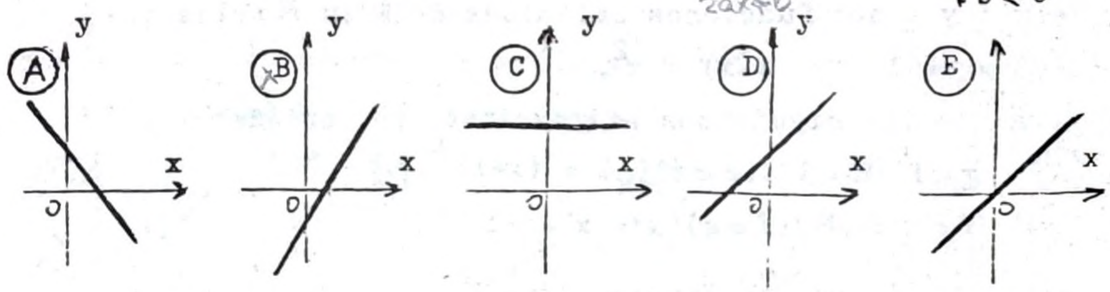
(C) La pendiente de la gráfica de g es negativa en cualquiera de sus puntos.

(D) $g'(s) = -3s^2$

(E) Ninguna de las anteriores.

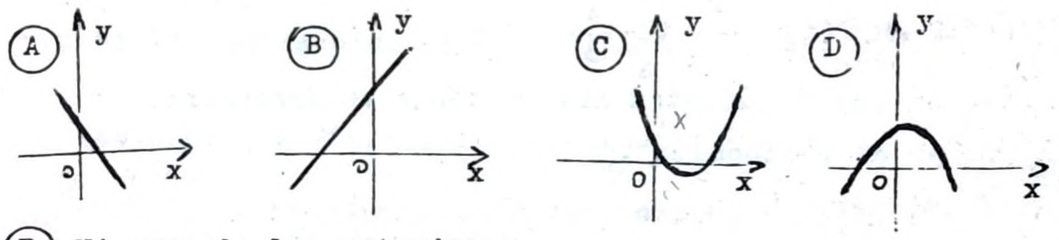
Ejercicio N°19:

¿Cuál de las siguientes gráficas podría corresponder a la derivada de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} / f(x) = ax^2+bx+c$ con $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases}$



Ejercicio N°20 :

Si la gráfica de la derivada f' de una función f es una recta con pendiente positiva, ¿Cuál de las siguientes gráficas podría corresponder a f ? :



(E) Ninguna de las anteriores.

RESPUESTAS DEL TRABAJO PRACTICO COMPLEMENTARIO N°1

Ejercicio N°1: (pág 397)

1)

	x	f(x)	g(x)
a)		9	0
b)		1	2

2)

	x	f(x)
a)	-1	
	1	

3)

	x	g(x)
a)	18	

Ejercicio N°2 (pág 397)

$k = 1$

Ejercicio N°3 (pág 397)

1) $S = (-\infty ; 6]$ — 6

2) $S = [-3;6]$ — -3 6

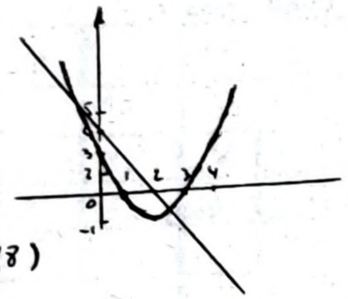
3) $S = (-5;5)$ — -5 5

4) $S = (-\infty ;0] \cup [1; +\infty)$ — 0 1

5) $S = (-\infty ; -10) \cup (6; +\infty)$ — -10 6

Ejercicio N°4 (pág 398)

$$S = \left\{ (1+\sqrt{2} ; 2-2\sqrt{2}), (1-\sqrt{2} ; 2+2\sqrt{2}) \right\}$$



Ejercicio N°5 (pág 398)

$$\frac{26}{3} < k < \frac{91}{5}$$

Ejercicio N°6 (pág 398)

$$S = \{2\}$$

Ejercicio N°7 (pág 398)

$48 \frac{km}{h}$ y $36 \frac{km}{h}$

Ejercicio N°8: (pág 398)

1) 0

2) $\cos^2\alpha$

3) 1

Ejercicio N°9: (pág 399)

1) $30° \leq \alpha \leq 150°$

2) $\alpha \in [225°; 315°]$

3) $\alpha \in [60°; 90°) \cup [240°; 270°)$

Ejercicio N°10 (pág 399)

Altura : 15,62 m

Ejercicio N°11: (pág 399)

1) -4

2) 3

Ejercicio N°12: (pág 399)

1) $v_{med} = 34,30 \frac{m}{s}$ 2) $v = 19,6 \frac{m}{s}$

Ejercicio N°13 (pág 400)

1) $88 \frac{m}{s}$ 2) 12 s

Ejercicio N°14 (pág 400)

1) 3

2) $2s + 2$

3) $\frac{s^3}{3} + s^2 + C$ con $C \in \mathbb{R}$

4) $\frac{2}{3}$

5) 2 (unidades de área)

Ejercicio N°15 (pág 400)

1) nula. positiva. negativa.

2) recta positiva.

Ejercicio N°16 (pág 401)

f' f f''

Ejercicio N 17 (pág 401)

a) ⟷ f)
b) ⟷ e)
c) ⟷ d)

RESPUESTAS DEL TRABAJO PRACTICO COMPLEMENTARIO N°2 (pág 402)

V 1,3,7,8,9,10,11,12,15,17,19,20,21,13,24 .

F 2,4,5,6, 14,16,18,22,23.

RESPUESTAS DEL TRABAJO PRACTICO COMPLEMENTARIO N°3 (pág 404)

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1		X				11			X		
2			X			12	X				
3					X	13			X		
4	X					14		X			
5				X		15				X	
6				X		16	X				
7					X	17				X	
8					X	18				X	
9		X				19		X			
10	X					20			X		

Impreso en Edigraf S.A., Delgado 834, en la primera quincena de 1989. Buenos Aires, República Argentina.